

○●✱★•✱✱●○◦○●✱★•✱✱●○◦○●✱★•✱✱●○◦○●✱★•✱✱●○◦○●✱★•✱✱●○◦○●✱★•✱✱●○◦○●✱★•✱✱●○

Opgave 1. Zij $(S_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ de *vrije Bernoulli-wandeling* (met $S_0 \equiv 0$) met parameter $p = \frac{1}{2}$. Zoals bekend, geldt voor de gf U van de rij $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ met $u_n := \mathbb{P}(S_n = 0)$:

$$U(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, \quad (*)$$

en kan de verdeling $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ van de terugkeertijd τ van toestand 0 hieruit gevonden worden met behulp van de zuivere vernieuwingsvergelijking.

- (i). Geef deze vergelijking (zonder bewijs) zowel in termen van de rijen (u_n) en (f_n) als in termen van hun gf's U en F , en laat hiermee en met $(*)$ zien dat

$$f_n = u_{n-2} - u_n \quad [n \in \mathbb{N} \text{ met } n > 2].$$

- (ii). Laat met behulp van (i) zien dat $\mathbb{P}(S_1 \neq 0; \dots; S_n \neq 0) = u_n$ voor $n \in \mathbb{N}$ even.

Beschouw voor *even* $n \in \mathbb{N}$: $V_n := \max \{m \leq n : S_m = 0\}$, dit is het *moment van het laatste bezoek aan 0* gedurende het tijdsinterval $[0, n]$.

- (iii). Bepaal $\mathbb{P}(V_n = 0)$ en $\mathbb{P}(V_n = n)$.
- (iv). Laat voor $k = 1, \dots, n - 1$ zien dat $\mathbb{P}(V_n = k) = u_k u_{n-k}$.
- (v). Bepaal de verdeling van V_6 expliciet en geef deze weer in een figuur. Welk aspect van de verdeling is enigszins verrassend?

Opgave 2. Zij $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ een Markov-keten met toestandsruimte I , startverdeling a , en overgangsmatrix $\mathcal{P} = (p_{ij})_{i,j \in I}$. Zij τ_j de intreetijd van toestand j , en noteer:

$$p_{aj}^{(n)} := \mathbb{P}_a(X_n = j), \quad f_{aj}^{(n)} := \mathbb{P}_a(\tau_j = n), \quad f_{aj} := \mathbb{P}_a(\tau_j < \infty).$$

- (i). Formuleer en bewijs het verband tussen de rijen $(p_{aj}^{(n)})$, $(f_{aj}^{(n)})$ en $(p_{jj}^{(n)})$ dat gegeven wordt door de algemene vernieuwingsvergelijking.

Zij $N(j) := \#(\{n \in \mathbb{N} : X_n = j\})$, dit is het *aantal bezoeken aan toestand j* .

- (ii). Druk $\mathbb{E}_a N(j)$ uit in $p_{aj}^{(n)}$ met $n \in \mathbb{N}$, en laat dan met behulp van (i) zien dat

$$\mathbb{E}_a N(j) = f_{aj} \{1 + \mathbb{E}_j N(j)\} \quad [0 \cdot \infty := 0].$$

- (iii). Bewijs met behulp van (ii) (voor algemene a én voor a met $a_j = 1$) dat voor *voorbijgaande* j geldt: $\mathbb{E}_a N(j) = f_{aj}/(1 - f_{jj})$.

Laat verder $I = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $a_i = \frac{1}{5}$ voor alle i ,
en laat $\mathcal{P}$ gegeven zijn door de matrix hiernaast.

- (iv). Bepaal de terugkeerverdeling ($f_{44}^{(n)}$) van toestand 4, laat daarmee zien dat 4 voorbijgaand is, en bepaal $\mathbb{E}_a N(4)$.
- (v). Laat zien dat de keten een limietverdeling heeft, en bepaal deze.

$$\begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Opgave 3. Beschouw het proces $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ recursief gedefinieerd door

$$X_{n+1} := (X_n - 1)^+ + Y_n \quad \left[n \in \mathbb{Z}_+; r^+ := \max \{r, 0\} \text{ voor } r \in \mathbb{R} \right],$$

waarbij $X_0, Y_0, Y_1, \dots$ onafhankelijk en $\mathbb{Z}_+$ -waardig zijn, en $Y_0, Y_1, \dots$ gelijkverdeeld met verdeling $(q_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$ en kgf Q . U herkent wellicht het *wachtrij-proces* van Hoofdstuk VI-A.

- (i). Laat zien dat (X_n) een Markov-keten is met toestandsruimte $I = \mathbb{Z}_+$ en met een overgangsmatrix $\mathcal{P} = (p_{ij})_{i,j \in I}$ waarvoor $p_{0k} = q_k$ voor $k \in I$.

Zij F de gf van de terugkeerverdeling $(f_{00}^{(n)})$ van toestand 0.

- (ii). Druk $(f_{00}^{(n)})$ uit in de intreeverdeling $(f_{k0}^{(n)})$ van 0 bij start in $k \in \mathbb{N}$ (splits uit naar de waarden van X_1 ; verder geen bewijs), en laat met behulp hiervan en van het inzichtelijke feit dat F^k de gf is van $(f_{k0}^{(n)})$ voor $k \in \mathbb{N}$ (geen bewijs), zien dat F voldoet aan de functionaalvergelijking $F(z) = zQ(F(z))$.

Laat verder (q_k) gegeven zijn door $q_k = p q^k$ voor $k \in \mathbb{Z}_+$, voor zekere $p \in (0, 1)$ en met $q := 1 - p$. De keten is dan *irreducibel* en *aperiodiek*.

- (iii). Bepaal de kgf Q , en laat vervolgens door oplossen van de vergelijking in (ii) zien dat F gegeven wordt door $F(z) = (1 - \sqrt{1 - 4pqz})/(2q)$.
- (iv). Onderzoek met behulp van (iii) voor welke waarden van p de keten respectievelijk voorbijgaand, nul-recurrent, positief-recurrent is.
- (v). Bepaal de waarden van p waarvoor de keten een limietverdeling $\phi = (\phi_j)_{j \in I}$ heeft. Wat is dan ϕ_0 , en hoe kunnen de overige ϕ_j in principe bepaald worden?

Opgave 4. Zij $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ een Markov-keten met toestandsruimte $I = \mathbb{Z}_+$, met start in toestand 1 (dus $X_0 \equiv 1$), en met overgangs-

matrix $\mathcal{P}$ bepaald door de matrix hiernaast,

waarbij $p \in (0, 1)$ en $q := 1 - p$, dus:

$$p_{12} = p_{23} = p_{34} = p_{45} = \cdots = p;$$

$$p_{10} = p_{22} = p_{32} = p_{43} = p_{54} = \cdots = q.$$

- (i). Bepaal de indeling van I in klassen.
- (ii). Ga voor elke klasse C na of er invariante kansmaten π zijn met drager C , en bepaal deze dan.

$$\begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & 0 & p & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & q & p & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & q & 0 & p & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & q & 0 & p & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & p & & \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & & & & & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- (iii). Ga na wanneer de keten een limietverdeling heeft, en bepaal deze dan.

○●✱✱✱✱●○●○●✱✱✱✱✱✱●○●○●✱✱✱✱✱✱●○●○●✱✱✱✱✱✱●○●○●✱✱✱✱✱✱●○●○●✱✱✱✱✱✱●○●○●✱✱✱✱✱✱●○

NORMERING: 1 (i): 2 2 (i): 2 3 (i): 2 4 (i): 1 TOTAAL: 38 punten!

(ii): 2 (ii): 2 (ii): 2 (ii): 4

(iii): 1 (iii): 1 (iii): 2 (iii): 3

(iv): 2 (iv): 3 (iv): 2

$$(v): 2 \quad (v): 3 \quad (v): 2$$

9 11 10 8

EINDCIJFER T :

$$1 + \frac{1}{4} \times \text{totaal}.$$

○●*★・★*●○・○●*★・★*●○・○●*★・★*●○・○●*★・★*●○・○●*★・★*●○・○●*★・★*●○