



Opgave 1. Zij $(S_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ de *vrije Bernoulli-wandeling* (met $S_0 \equiv 0$) met parameter $p = \frac{1}{2}$. Zoals bekend, zijn de basiskansen $u_n := \mathbb{P}(S_n = 0)$ met $n \in \mathbb{Z}_+$ eenvoudig te berekenen en wordt de gf U van de rij $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ gegeven door

$$U(z) = 1/\sqrt{1-z^2}.$$

We zijn geïnteresseerd in de rij $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ met $c_n := \mathbb{E}|S_n|$, dit is de *verwachte afstand* tot de begintoestand op tijdstip n . Zij C de gf van deze rij.

- (i). Druk, voor $n \geq 2$, de staartkans $\mathbb{P}(S_n > r)$ voor S_n met $r \in \mathbb{Z}$ uit in soortgelijke staartkansen voor S_{n-1} .
- (ii). Bewijs met een bekende eigenschap van verwachtingen: $c_n = 2 \sum_{r=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n > r)$, en laat met behulp hiervan en van (i) zien dat $c_n = u_{n-1} + c_{n-1}$ voor $n \in \mathbb{N}$.
- (iii). Herschrijf de recurrente betrekking van (ii) in termen van C en U , en laat hiermee zien dat $C(z) = zU(z)/(1-z)$ voor $z \in [0, 1)$.
- (iv). Bepaal de afgeleide $U'(z)$, en laat met (iii) zien dat ook $C(z) = (1+z)U'(z)$.
- (v). Laat met (iv) zien dat c_n op eenvoudige wijze is uit te drukken in u_n en u_{n+1} , en bepaal de numerieke waarde van c_7 (als onvereenvoudigbare breuk).

Opgave 2. Zij $(S_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ de vrije Bernoulli-wandeling (met $S_0 \equiv 0$) met parameter $p < \frac{1}{2}$. Noteer $q := 1 - p$. Zoals bekend, wordt de gf F van de verdeling $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ van de terugkeertijd τ van 0 gegeven door $F(z) = 1 - \sqrt{1 - 4pqz^2}$.

- (i). Laat hiermee zien dat $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 2p$.

Zij $g = (g_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ de verdeling van de *intreetijd* $\sigma_1 (= I_1)$ van toestand 1.

- (ii). Bewijs door middel van een combinatorische methode dat

$$f_{n+1} = 2\mathbb{P}(S_1 < 0; \cdots; S_n < 0; S_{n+1} = 0) \quad [n \in \mathbb{N}],$$

en laat hiermee zien dat $f_{n+1} = 2g q_n$ voor $n \in \mathbb{N}$.

- (iii). Laat met behulp van (i) en (ii) zien dat $\mathbb{P}(\sigma_1 < \infty) = p/q$.

Zij, voor $r \in \mathbb{N}$, $(g_n^{(r)})_{n \in \mathbb{Z}_+}$ de verdeling van de *intreetijd* I_r van toestand r .

- (iv). Definieer $\sigma_2 := I_2 - I_1$ als $I_1 < \infty$, en $:= \infty$ als $I_1 = \infty$; aldus is $I_2 = \sigma_1 + \sigma_2$.
Laat zien dat

$$\mathbb{P}(\sigma_1 = k; \sigma_2 = \ell) = q_k q_\ell \quad [k, \ell \in \mathbb{Z}_+],$$

en bewijs hiermee dat $g_n^{(2)} = g_n^{*2}$ voor alle n .

- (v). Laat met de voor de hand liggende generalisatie van (het slot van) (iv) zien dat

$$\mathbb{P}(I_r < \infty) = (p/q)^r \quad [r \in \mathbb{N}].$$

- (vi). Zij $M := \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} S_n$; op de eventualiteit $\{M < \infty\}$ is M het *maximum* van de wandeling. Bepaal met behulp van (v) de kansverdeling van M .

○●*★・★*●○・○●*★・★*●○・○●*★・★*●○・○●*★・★*●○・○●*★・★*●○・○●*★・★*●○