Tentamen **Markov-ketens** — Afdeling Wiskunde (FEW)

3 juni 2005 — Vrije Universiteit Amsterdam

**Opgave 1.** Zij $(S_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ de *vrije Bernoulli-wandeling* (met $S_0 \equiv 0$) met parameter $p < \frac{1}{2}$; laat $u_n := \mathbb{P}(S_n = 0)$ en $u_n^{(1)} := \mathbb{P}(S_n = 1)$ voor $n \in \mathbb{Z}_+$. Noteer $q := 1 - p$.

(i). Geef, voor $k \in \mathbb{N}$, een expliciete uitdrukking voor $u_{2k}$ en $u_{2k-1}^{(1)}$, en laat daarmee zien dat $u_{n+1} = 2q\, u_n^{(1)}$ voor $n = 2k-1$ met $k \in \mathbb{N}$ (en dan voor álle $n \in \mathbb{Z}_+$).

Zij $g = (g_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ de verdeling en $G$ de kgf van de *intreetijd* $\sigma_1$ van toestand 1.

(ii). Formuleer en bewijs het verband tussen de rijen $(u_n^{(1)})$, $(g_n)$ en $(u_n)$ dat gegeven wordt door de gemengde vernieuwingsvergelijking.

(iii). Zoals bekend, wordt de gf $U$ van $(u_n)$ gegeven door $U(z) = (1 - 4pqz^2)^{-1/2}$. Bepaal met behulp hiervan en van (i) en (ii) de gf $G$, en laat daarmee zien dat $\mathbb{P}(\sigma_1 < \infty) = p/q$.

Zij, voor $r \in \mathbb{N}$, $g^{(r)} = (g_n^{(r)})_{n\in\mathbb{Z}_+}$ de verdeling van de *intreetijd* $I_r$ van toestand $r$.

(iv). Definieer $\sigma_2 := I_2 - I_1$ als $I_1 < \infty$, en $:= \infty$ als $I_1 = \infty$; aldus is $I_2 = \sigma_1 + \sigma_2$. Laat zien dat $\mathbb{P}(\sigma_1 = k;\ \sigma_2 = \ell) = g_k g_\ell$ voor $k, \ell \in \mathbb{Z}_+$, en hiermee dat $g^{(2)} = g^{*2}$.

(v). Laat met de voor de hand liggende generalisatie van (het slot van) (iv) zien dat

$$\mathbb{P}(I_r < \infty) = (p/q)^r \qquad [\, r \in \mathbb{N}\,].$$

(vi). Zij $M := \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} S_n$; op de eventualiteit $\{M < \infty\}$ is $M$ het *maximum* van de wandeling. Bepaal met behulp van (v) de kansverdeling van $M$.

**Opgave 2.** Zij $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ een Markov-keten met toestandsruimte $I$, startverdeling $a$ en overgangsmatrix $\mathcal{P} = (p_{ij})$. Noteer $f_{aC} := \mathbb{P}_a(\exists\, n \in \mathbb{N} : X_n \in C)$, en $f_{aj} := f_{a\{j\}}$.

(i). Geef, zonder bewijs, voor $j \in I$ het bekende transiëntie-criterium in termen van de overgangskansen $p_{jj}^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, en laat hiermee en met de algemene vernieuwingsvergelijking zien dat het verwachte aantal bezoeken aan $j$, $\mathbb{E}_a N(j)$, eindig is als $j$ *voorbijgaand* is.

(ii). Bewijs met behulp van (het slot van) (i) de bekende eigenschap dat voor iedere *eindige* verzameling $D$ van *voorbijgaande* toestanden: $\mathbb{P}_a(X_n \in D\ \infty\text{-vaak}) = 0$. Waarom is dan $f_{aC} = 1$ met $C = D^c$?

Laat verder $I = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $a = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$ en $\mathcal{P}$ gegeven zijn door de matrix hiernaast.

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \end{array}$$

(iii). Laat, zonder bepaling van intreeverdelingen, zien dat $f_{a3} = \frac{3}{8}$.

(iv). Laat zien dat de keten een limietverdeling heeft, en bepaal deze, bijvoorbeeld met behulp van (ii).

**ZOZ**

**Opgave 3.** Beschouw een Markov-keten $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ met toestandsruimte $I$, startverdeling $a$ en overgangsmatrix $\mathcal{P} = (p_{ij})$.

(i). Formuleer de FLS voor $(X_n)$ in het positief-recurrente geval, en laat kort zien hoe dit bewezen kan worden; doe dit door (uitleg van en) een geschikte keuze van $b$ in de *koppelingsongelijkheid* (die u niet hoeft te bewijzen):

$$\sum_{j\in I}\big|\mathbb{P}_a(X_n = j) - \mathbb{P}_b(X'_n = j)\big| \le 2\,\mathbb{P}(T_k > n) \qquad [\,n\in\mathbb{N};\ k\in I\,].$$

Laat verder $I = \mathbb{Z}_+$ en $\mathcal{P}$ bepaald zijn door $p_{0j} = f_j$ als $j\in\mathbb{Z}_+$, en $p_{ij} = 1$ als $i\in\mathbb{N}$ en $j = i-1$, waarbij $(f_j)_{j\in\mathbb{Z}_+}$ een kansverdeling is op $\mathbb{Z}_+$ met $f_j > 0$ voor alle $j$.

(ii). Bepaal alle voor $\mathcal{P}$ invariante maten $\psi$, laat daarmee zien dat de keten een limietverdeling $\phi$ heeft als en alleen als $\mu := \sum_{j=0}^{\infty} j f_j < \infty$, en bepaal $\phi$ dan.

**Opgave 4.** Beschouw de *Bernoulli-wandeling met elastische grens 0* en parameter $p$; dit is het proces $(S_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ recursief gedefinieerd door

$$S_{n+1} = (S_n + Y_{n+1})^+ \qquad [\,n\in\mathbb{Z}_+;\ r^+ := \max\{r,0\} \text{ voor } r\in\mathbb{R}\,],$$

waarbij $S_0, Y_1, Y_2, \ldots$ onafhankelijk zijn, $S_0$ $\mathbb{Z}_+$-waardig is en $Y_1, Y_2, \ldots$ alternatief$(p)$ verdeeld zijn op $\{-1, 1\}$. Zet $q := 1-p$.

(i). Bewijs dat $(S_n)$ een Markov-keten is, bepaal de overgangsmatrix $\mathcal{P}$, en laat zien dat $\mathcal{P}$ irreducibel en aperiodiek is.

Zij $\tau$ de intreetijd van toestand 0. We willen de verdeling $(f_{00}^{(n)})_{n\in\mathbb{Z}_+}$ van $\tau$ bij start in 0 onderzoeken, en doen dit, zoals in het wachtrij-probleem van Hoofdstuk VI-A, door uitsplitsing naar de waarden van $S_1$; zie (ii). Zo volgt ook dat, zoals voor de hand ligt op grond van bekende eigenschappen van de *vrije* Bernoulli-wandeling, de verdeling $(f_{10}^{(n)})_{n\in\mathbb{Z}_+}$ van $\tau$ bij start in 1 gf $F_{10}$ heeft met $F_{10}(z) = (1-\sqrt{1-4pqz^2})/(2pz)$.

(ii). Laat zien dat en hoe $(f_{00}^{(n)})$ uitgedrukt kan worden in $(f_{10}^{(n)})$, en bewijs hiermee dat de gf $F_{00}$ van de rij $(f_{00}^{(n)})$ gegeven wordt door

$$F_{00}(z) = qz + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{1-4pqz^2}.$$

(iii). Bepaal de terugkeerkans $f_{00} := \mathbb{P}_0(\tau < \infty)$, en laat zien dat er een 'kritieke waarde' $p^*$ van $p$ is zó dat de keten voorbijgaand is als $p > p^*$, nul-recurrent als $p = p^*$, en positief-recurrent als $p < p^*$. Wat is $\mu(0) := \mathbb{E}_0\tau$ in het laatste geval?

(iv). Bepaal met behulp van (iii) de waarden van $p$ waarvoor de keten een limietverdeling heeft, en bepaal deze verdeling expliciet.

○●∗⋆·⋆∗●○·○●∗⋆·⋆∗●○·○●∗⋆·⋆∗●○·○●∗⋆·⋆∗●○·○●∗⋆·⋆∗●○

| NORMERING: | **1** (i): 2 | **2** (i): 2 | **3** (i): 2 | **4** (i): 2 | TOTAAL: 38 punten! |
|---|---|---|---|---|---|
| | (ii): 2 | (ii): 2 | (ii): 4 | (ii): 2 | |
| | (iii): 2 | (iii): 2 | | (iii): 3 | EINDCIJFER $T$: |
| | (iv): 3 | (iv): 4 | | (iv): 3 | $1 + \frac{1}{4} \times$ totaal. |
| | (v): 1 | | | | |
| | (vi): 2 | | | | |
| | 12 | 10 | 6 | 10 | |

○●∗⋆·⋆∗●○·○●∗⋆·⋆∗●○·○●∗⋆·⋆∗●○·○●∗⋆·⋆∗●○·○●∗⋆·⋆∗●○