

Opgave 3. Zij $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ een Markov-keten met toestandsruimte $I = \{0, 1, 2, 3\}$ en met overgangsmatrix $\mathcal{P} = (p_{ij})_{i,j \in I}$, voor zekere $p \in (0, 1)$ bepaald door

$$p_{01} = p_{12} = p_{23} = 1, \quad p_{30} = p, \quad p_{31} = q := 1 - p.$$

- (i). Schrijf $\mathcal{P}$ in matrix-vorm, geef het bij $\mathcal{P}$ behorende 1-stapsschema, en verdeel I in klassen van communicerende toestanden.

We beschouwen toestand 0. Zij $p_{00}^{(n)} := \mathbb{P}_0(X_n = 0)$ en $f_{00}^{(n)} := \mathbb{P}_0(\tau_0 = n)$, met τ_0 de intreetijd van toestand 0, en definieer de verzamelingen $A(0)$ en $B(0)$ door

$$A(0) := \{n \in \mathbb{N} : p_{00}^{(n)} > 0\}, \quad B(0) := \{n \in \mathbb{N} : f_{00}^{(n)} > 0\}.$$

- (ii). Bepaal $B(0)$, bereken $f_{00}^{(n)}$ voor $n \in B(0)$, en laat zien dat 0 *recurrent* is. Is 0 ook *positief-recurrent*?
- (iii). Bewijs de bekende eigenschap dat $p_{00}^{(m+n)} = \sum_{k \in I} p_{0k}^{(m)} p_{k0}^{(n)}$ voor $m, n \in \mathbb{N}$, en laat hiermee zien dat $A(0)$ gesloten is onder optelling.
- (iv). Geef de kleinste vijf elementen van $A(0)$, en bepaal de periode $d(0)$ van 0. Is ook $23 \in A(0)$?
- (v). Laat zien dat $X_0, X_1, \dots$ gelijkverdeeld zijn als en alleen als de startverdeling a van de keten gelijk is aan π , dit is de rij-kansvector die voldoet aan $\pi = \pi \mathcal{P}$, en bepaal deze π .
- (vi). Start de keten in toestand 1, dus werk met de kansmaat $\mathbb{P}_1$. Laat dan zien dat $\mathbb{P}_1(X_n \neq 0 \text{ voor alle } n) = 0$; wat volgt hieruit, met een bekende eigenschap, voor de $\mathbb{P}_1$ -verdeling van het aantal bezoeken $N(0)$ aan toestand 0?

○ ● ★ • ★ * ● ○ • ○ ● * ★ • ★ * ● ○ • ○ ● * ★ • ★ * ● ○ • ○ ● * ★ • ★ * ● ○ • ○ ● * ★ • ★ * ● ○ • ○ ● * ★ • ★ * ● ○

NORMERING: **1 (i): 1** **2 (i): 2** **3 (i): 1** TOTAAL: 30 punten.

(ii): 1 (ii): 3 (ii): 3

(iii): 3 (iii): 2 (iii): 2 EINDCIJFER:

$$(iv): 1 \quad (iv): 2 \quad (iv): 2 \quad \frac{1}{3} \times \text{totaal.}$$

(v): 2 (v): 3

(vi): 2

8

9

13

[illegible]