

Opgave 3. Beschouw Markov-ketens $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$, met toestandsruimte I , startverdeling a en overgangsmatrix $\mathcal{P}$, met de eigenschap dat de limieten

$$\phi_j := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_a(X_n = j) \quad [j \in I]$$

alle bestaan. Noteer $\phi := (\phi_j)_{j \in I}$; ϕ is een maat op I .

- (i). Zoals bekend, is ϕ noodzakelijk invariant voor $\mathcal{P}$. Laat hiermee zien dat als $\phi_i > 0$, dan ook $\phi_j > 0$ voor alle j met $i \rightsquigarrow j$.
- (ii). Laat $\#(I) < \infty$. Waarom is ϕ nu noodzakelijk de limietverdeling van de keten, d.w.z. waarom is nu $\sum_{j \in I} \phi_j = 1$?
- (iii). Geef een voorbeeld van een keten met $\sum_{j \in I} \phi_j = 0$, dus met $\phi_j = 0$ voor alle j .
- (iv). Geef een voorbeeld van een keten met $\sum_{j \in I} \phi_j$ weliswaar > 0 , maar < 1 .
- (v). Geef een voorbeeld van een keten met $\#(I) = \infty$ waarvoor $\sum_{j \in I} \phi_j = 1$, dus waarvoor ϕ de limietverdeling van de keten is.

Opgave 4. Beschouw het proces $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$, recursief gedefinieerd door

$$X_{n+1} = (X_n - Y_n)^+ + 1 \quad [n \in \mathbb{Z}_+],$$

waarbij $X_0, Y_0, Y_1, \dots$ onafhankelijk zijn, $Y_n \stackrel{d}{=} Y$ voor alle n met $\mathbb{P}(Y = k) = p q^k$ voor $k \in \mathbb{Z}_+$ en met zekere $p \in (0, 1)$ en $q := 1 - p$, en $r^+ := \max\{r, 0\}$. Dit proces kan geïnterpreteerd worden als een *wachtrij-proces* met een naar 0 verschoven geometrische bedieningsverdeling en een instroom van één klant per tijdseenheid.

- (i). Laat zien dat (X_n) een Markov-keten is met toestandsruimte $I = \mathbb{N}$ en overgangsmatrix $\mathcal{P} = (p_{ij})$ bepaald door
$$p_{ij} = \begin{cases} q^i & , \text{ als } i \in \mathbb{N} \text{ en } j = 1, \\ p q^{i-j+1} & , \text{ als } i \in \mathbb{N} \text{ en } 2 \leq j \leq i + 1. \end{cases}$$
- (ii). Schrijf $\mathcal{P}$ in matrix-vorm, en stel de voor $\mathcal{P}$ stationaire vergelijking op voor een maat $\psi = (\psi_j)_{j \in I}$.
- (iii). Zij $\psi = (\psi_j)_{j \in I}$ de maat met $\psi_j = \alpha^j$, voor zekere $\alpha > 0$. Laat zien dat ψ invariant is voor $\mathcal{P}$ als en alleen als $\alpha = p/q$.
- (iv). Zij $\psi = (\psi_j)_{j \in I}$ een voor $\mathcal{P}$ invariante maat met gf P : $P(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j z^j$. Stel voor $z \in (0, q)$ met behulp van (ii) een vergelijking op voor $P(z)$, los deze op, en concludeer dat ψ , op een (multiplicatieve) constante na, gegeven wordt door de in (iii) gevonden invariante maat.
- (v). Bepaal de waarden van p waarvoor de keten een limietverdeling heeft, en bereken deze limietverdeling expliciet.

○ ● * ★ • ★ * ● ○ ○ ● * ★ • ★ * ● ○ ○ ● * ★ • ★ * ● ○ ○ ● * ★ • ★ * ● ○ ○ ● * ★ • ★ * ● ○

NORMERING:	1 (i): 2	2 (i): 1	3 (i): 2	4 (i): 2	TOTAAL: 38 punten!
	(ii): 3	(ii): 4	(ii): 1	(ii): 1	
	(iii): 1	(iii): 3	(iii): 1	(iii): 2	EINDCIJFER T:
	(iv): 3	(iv): 3	(iv): 2	(iv): 3	$1 + \frac{1}{4} \times \text{totaal}$
	(v): $\frac{1}{10}$	$\frac{1}{11}$	(v): $\frac{1}{7}$	(v): $\frac{2}{10}$	

○ ● * ★ • ★ * ● ○ ○ ● * ★ • ★ * ● ○ ○ ● * ★ • ★ * ● ○ ○ ● * ★ • ★ * ● ○ ○ ● * ★ • ★ * ● ○