Tentamen **Markov-ketens** Afdeling Wiskunde (FEW)

28 mei 2004 Vrije Universiteit Amsterdam

○●✶✶·✶✶●○·○●✶✶·✶✶●○·○●✶✶·✶✶●○·○●✶✶·✶✶●○·○●✶✶·✶✶●○·○●✶✶·✶✶●○·○●✶✶·✶✶●○

Opgave 1. Zij $(S_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ de vrije Bernoulli-wandeling (met $S_0 \equiv 0$) met parameter p. We willen de verdeling $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ van de terugkeertijd van toestand 0 bepalen zonder gebruik van de zuivere vernieuwingsvergelijking en van de basisrij (u_n) met $u_n := \mathbb{P}(S_n = 0)$. We doen dit, zoals in het wachtrij-probleem van Hoofdstuk VI-A, door uitsplitsing naar de waarden van S_1. Zij $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ de verdeling van de intreetijd van toestand 1 en $(\overline{g}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ die van toestand -1. Noteer $q := 1-p$.

(i). Laat zien dat $f_1 = 0$ en $f_{m+1} = q\,g_m + p\,\overline{g}_m$ voor $m \in \mathbb{N}$.

(ii). Laat zien dat $g_1 = p$ en $g_{m+1} = q\,g_m^{*2}$ voor $m \in \mathbb{N}$, vertaal dit in termen van de gf G van (g_n), en bepaal G door oplossing van de resulterende functionaalvergelijking.

(iii). Wat is nu de gf $\overline{G}$ van $(\overline{g}_n)$? Antwoord volstaat.

(iv). Bewijs met behulp van (i), (ii) en (iii) dat de gf F van (f_n) gegeven wordt door

$$F(z) = 1 - \sqrt{1 - 4pqz^2},$$

en bepaal hiermee een expliciete uitdrukking voor de terugkeerkansen f_n.

(v). Laat met behulp van (iv) zien dat de wandeling voor geen enkele waarde van p positief-recurrent is.

Opgave 2. Zij $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ een Markov-keten met toestandsruimte I, startverdeling a en overgangsmatrix $\mathcal{P} = (p_{ij})$. Noteer $f_{aj} := \mathbb{P}_a(\tau_j < \infty)$, met τ_j de intreetijd van toestand j, en zij $N(j)$ het aantal bezoeken aan j:

$$N(j) := \#\big(\{n \in \mathbb{N} : X_n = j\}\big).$$

(i). Bewijs met behulp van inductie en door uitsplitsing naar de waarden van τ_j dat

$$\mathbb{P}_a(N(j) \geq m) = f_{aj}\,(f_{jj})^{m-1} \qquad [m \in \mathbb{N}].$$

(ii). Welk kenmerk van (de verdeling van) $N(j)$ krijgen we als we in $\mathbb{P}_a(N(j) \geq m)$ de limiet nemen voor $m \to \infty$? En welk als we sommeren over $m \in \mathbb{N}$? Welk resultaat geeft (i) in elk der beide gevallen?

Beschouw verder het speciale geval waarbij $I = \{0,1,2,3,4\}$, $a = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, 0)$, en $\mathcal{P}$ gegeven wordt door de matrix hiernaast.

(iii). Laat, zonder bepaling van intreeverdelingen, zien dat $f_{a1} = \frac{1}{2}$, en bepaal met behulp hiervan en van (i) de kansverdeling van $N(1)$. Is $N(1)$ defectief?

(iv). Laat zien dat de keten een limietverdeling heeft, en bepaal deze.

	0	1	2	3	4
0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
1	0	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{2}{3}$
2	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
3	0	0	1	0	0
4	$\frac{1}{4}$	0	0	0	$\frac{3}{4}$

StudieVereniging STORM
De Boelelaan 1081
1081 HV AMSTERDAM
telefoon: 020 - 4447666
e-mail: storm@cs.vu.nl

ZOZ

Opgave 3. Beschouw een Markov-keten $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ met toestandsruimte I, startverdeling a en overgangsmatrix $\mathcal{P} = (p_{ij})$.

(i). Formuleer de FLS voor (X_n) in het positief-recurrente geval, en laat kort zien hoe dit bewezen kan worden; doe dit door (uitleg van en) een geschikte keuze van b in de *koppelingsongelijkheid* (die u niet hoeft te bewijzen):

$$\sum_{j\in I}\left|\mathbb{P}_a(X_n = j) - \mathbb{P}_b(X'_n = j)\right| \le 2\,\mathbb{P}(T_k > n) \qquad [n\in\mathbb{N};\ k\in I].$$

Laat verder $I = \mathbb{Z}_+$ en $\mathcal{P}$ bepaald zijn door

$$p_{ij} = \begin{cases} f_{i+1}/g_i & \text{, als } j = 0 \\ g_{i+1}/g_i & \text{, als } j = i+1 \end{cases} \qquad [i\in I],$$

waarbij $f = (f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ een kansverdeling is op $\mathbb{N}$ en $g = (g_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ de staartrij is bij f, dus $g_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k$ voor $n\in\mathbb{Z}_+$. Veronderstel dat $f_k > 0$ voor alle k.

(ii). Schrijf $\mathcal{P}$ in matrix-vorm, en laat zien dat $\mathcal{P}$ irreducibel en aperiodiek is.

(iii). Laat zien dat de verdeling van de terugkeertijd τ van toestand 0 juist gegeven wordt door f.

(iv). Ga met behulp van (iii) na voor welke verdelingen f de keten een limietverdeling ϕ heeft, en bepaal ϕ dan.

Opgave 4. Zij $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ een Markov-keten met toestandsruimte $I = \mathbb{Z}_+$ en met overgangsmatrix $\mathcal{P} = (p_{ij})$, voor zekere $p\in(0,1)$ (en met $q := 1-p$) bepaald door

$$p_{i,i+1} = p \text{ voor alle } i\in I,\ p_{00} = p_{11} = p_{i,i-1} = q \text{ voor alle } i \ge 2.$$

(i). Schrijf $\mathcal{P}$ in matrix-vorm en geef de klassen-indeling van I.

(ii). Stel de stationaire vergelijking op voor een voor $\mathcal{P}$ invariante maat $\psi = (\psi_j)_{j\in I}$, vertaal deze in termen van de gf P van de rij ψ, en laat zien dat P gegeven wordt door $P(z) = cqz/(q-pz)$ met $c \ge 0$. Wat is nu ψ_j voor $j\in I$?

(iii). Bepaal met behulp van (ii) de waarden van p waarvoor de keten een positief-recurrente klasse heeft, en laat zien dat de keten dan een limietverdeling heeft. Wat is deze?

○●∗★·★∗●○·○●∗★·★∗●○·○●∗★·★∗●○·○●∗★·★∗●○·○●∗★·★∗●○·○●∗★·★∗●○

NORMERING:	**1** (i): 2	**2** (i): 3	**3** (i): 2	**4** (i): 1	TOTAAL: 38 punten!
	(ii): 4	(ii): 2	(ii): 1	(ii): 3	
	(iii): 1	(iii): 3	(iii): 2	(iii): 3	EINDCIJFER T:
	(iv): 2	(iv): 4	(iv): 3		$1 + \frac{1}{4} \times$ totaal.
	(v): 2				
	11	12	8	7	

○●∗★·★∗●○·○●∗★·★∗●○·○●∗★·★∗●○·○●∗★·★∗●○·○●∗★·★∗●○·○●∗★·★∗●○