

Opgave 3. Zij $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ een Markov-keten met toestandsruimte $I = \mathbb{Z}_+$, met start in toestand 1 en met overgangsmatrix $\mathcal{P}$ bepaald door

$$p_{00} = 1; p_{12} = p_{23} = p_{34} = \dots = p; p_{10} = p_{22} = p_{32} = p_{43} = p_{54} = \dots = q,$$

met zekere $p \in (0, 1)$ en $q := 1 - p$; dus $p_{i1} = 0$ voor alle i .

- (i). Geef $\mathcal{P}$ in matrix-vorm, en bepaal de klassen van communicerende toestanden.
- (ii). Ga voor elke klasse C na of er een invariante kansmaat π is met drager C , en bepaal deze dan.
- (iii). Ga na wanneer de keten een limietverdeling heeft, en bepaal deze dan.

Opgave 4. Een gemodificeerd Ehrenfest-diffusie-model. Beschouw twee dozen D_1 en D_2 die op tijdstip $n = 0$ samen K ballen bevatten. Gedurende elke tijdseenheid doet men het volgende: men wijst blindelings en onafhankelijk van voorgaande aanwijzingen één der K ballen aan, neemt hem uit de doos waar hij in zit, en beslist door middel van een (onafhankelijke) muntworp met kans $p \in (0, 1)$ op 'kruis' in welke doos de bal teruggedaan wordt: bij 'kruis' in D_1 en bij 'munt' in D_2 .

Zij X_n het aantal ballen in D_1 op tijdstip n , dus na n trekkingen met teruglegging. Dan kan men bewijzen dat (X_n) een Markov-keten is met toestandsruimte $I := \{0, \dots, K\}$. Noteer $q_i := iq/K$ voor $i \in \{1, \dots, K\}$ en $p_i := (K - i)p/K$ voor $i \in \{0, \dots, K - 1\}$, waarbij $q := 1 - p$.

- (i). Laat zien dat en hoe de overgangsmatrix $\mathcal{P}$ van de keten uitgedrukt kan worden in de grootheden $q_1, \dots, q_K$ en $p_0, \dots, p_{K-1}$, geef $\mathcal{P}$ in matrix-vorm weer en bewijs dat $\mathcal{P}$ irreducibel en aperiodiek is.
- (ii). Waarom heeft $\mathcal{P}$ (precies) één invariante kansmaat π ? Bepaal π vervolgens. [Aanwijzing: laat zien dat de rij $(d_j)_{j=1, \dots, K}$ met $d_j := q_j \pi_j - p_{j-1} \pi_{j-1}$ constant is, bepaal deze constante en bepaal π_j dan door iteratie en normering.] Wat is π voor verdeling?
- (iii). Waarom heeft de keten een limietverdeling? Bepaal deze. Wat is het verwachte aantal ballen in D_1 in de stationaire toestand?

○ ● ★ ★ ★ ● ○ ○ ● ★ ★ ★ ● ○ ○ ● ★ ★ ★ ● ○ ○ ● ★ ★ ★ ● ○ ○ ● ★ ★ ★ ● ○ ○ ● ★ ★ ★ ● ○

NORMERING: 1 (i): 1 2 (i): 1 3 (i): 1 4 (i): 3 TOTAAL: 38 punten!

 (ii): 2 (ii): 2 (ii): 4 (ii): 4

 (iii): 4 (iii): 2 (iii): 4 (iii): 3 EINDCIJFER T :

 (iv): $\frac{2}{9}$ (iv): $\frac{5}{10}$ _____ _____ $1 + \frac{1}{4} \times \text{totaal.}$

○ ● ★ ★ ★ ● ○ ○ ● ★ ★ ★ ● ○ ○ ● ★ ★ ★ ● ○ ○ ● ★ ★ ★ ● ○ ○ ● ★ ★ ★ ● ○ ○ ● ★ ★ ★ ● ○