



Opgave 3. Zij $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ een Markov-keten met toestandsruimte I , startverdeling a en overgangsmatrix $\mathcal{P} = (p_{ij})_{i,j \in I}$. Noteer, zoals gebruikelijk, $p_{aj}^{(n)} := \mathbb{P}_a(X_n = j)$ en $f_{aj} := \mathbb{P}_a(\tau_j < \infty)$, met τ_j de intreetijd van toestand j .

- (i). Neem $j \in I$, en zij, voor $n \in \mathbb{N}$, A_n de eventualiteit waarbij de keten zich op tijdstip n voor het laatst in j bevindt. Formuleer A_n in termen van (X_n) , en laat zien dat en hoe $\mathbb{P}_a(A_n)$ uitgedrukt kan worden in $p_{aj}^{(n)}$ en f_{jj} .
- (ii). Bewijs met behulp van (i), en door beschouwing van de complementaire eventualiteit, de bekende eigenschap dat $\mathbb{P}_a(X_n = j \text{ } \infty\text{-vaak}) = f_{aj}$ voor *recurrente* j .

Laat verder $I = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ en laat $\mathcal{P}$ gegeven zijn door

$$\mathcal{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

- (iii). Geef het bij $\mathcal{P}$ behorende 1-steps-schema, en verdeel I met behulp daarvan in klassen van communicerende toestanden.
- (iv). Bepaal de terugkeerverdeling $(f_{33}^{(n)})$ van toestand 3, en laat zien dat 3 recurrent is.
- (v). Bepaal $\mathbb{P}_0(X_n = 1 \text{ } \infty\text{-vaak})$ [de keten wordt nu dus gestart in 0: $a_0 = 1$].

○ ● ★ ★ ★ ★ ● ○ ● ● ★ ★ ★ ★ ● ○ ● ● ★ ★ ★ ★ ● ○ ● ● ★ ★ ★ ★ ● ○ ● ● ★ ★ ★ ★ ● ○

NORMERING: **1** (i): 2 **2** (i): 2 **3** (i): 2 TOTAAL: 30 punten.

 (ii): 3 (ii): 2 (ii): 2

 (iii): 3 (iii): 2 (iii): 2 EINDCIJFER:

 (iv): 3 (iv): 2 $\frac{1}{3} \times \text{totaal}.$

 (v): 2 (v): 3

8

11

11

○ ● ★ ★ ★ ★ ● ○ ● ● ★ ★ ★ ★ ● ○ ● ● ★ ★ ★ ★ ● ○ ● ● ★ ★ ★ ★ ● ○ ● ● ★ ★ ★ ★ ● ○