



**Opgave 3.** Laat het proces  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$  met  $X_0 \equiv 1$  recursief gedefinieerd zijn door

$$X_{n+1} = U_1^{(n)} + \cdots + U_{X_n}^{(n)} \quad [n \in \mathbb{Z}_+; \text{ lege som} := 0],$$

waarbij de  $U_j^{(n)}$  met  $n \in \mathbb{Z}_+$  en  $j \in \mathbb{N}$  onafhankelijke,  $\mathbb{Z}_+$ -waardige sv'n zijn, alle met verdeling  $g = (g_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$  met  $0 < g_0 < 1$ . Men bewijst eenvoudig dat  $(X_n)$  een Markovketen is met  $I = \mathbb{Z}_+$ ; u herkent wellicht het *vertakkingsproces* met splitsingswet  $g$ . Zij  $\mu$  het eerste moment van  $g$  (verwachting bij  $g$ ) en  $G$  de gf van  $g$ .

- (i). Druk de 1-steps overgangskansen  $p_{ij}$ ,  $i, j \in I$ , uit in (convoluties van)  $g$ , en laat vervolgens met ‘Chapman-Kolmogorov’ zien dat de kgf  $G_n$  van  $X_n$  voldoet aan

$$G_n(s) = G_{n-1}(G(s)) = G(G_{n-1}(s)) \quad [n \in \mathbb{N}].$$

Zij  $\rho$  de *uitsterfkans* van het proces, dus  $\rho := \mathbb{P}(X_n = 0 \text{ voor een } n \in \mathbb{N})$ .

- (ii). Laat met de gemengde vernieuwingsvergelijking voor de rij  $(p_{10}^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  zien dat  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = \rho$ , en bewijs hiermee en met (i) dat  $\rho$  oplossing is van de vergelijking  $G(s) = s$ .
- (iii). Geef, in termen van  $\mu$ , aan wanneer  $\rho < 1$ ; korte argumentatie volstaat.
- (iv). Ga na wanneer het proces een limietverdeling heeft, en bepaal deze dan.
- (v). Bepaal  $\rho$  ingeval  $g_k = p(1-p)^k$  voor  $k \in \mathbb{Z}_+$ , met  $p \in (0, 1)$  een parameter.

**Opgave 4.** Zij  $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$  een rij van onafhankelijke, alternatief ( $p$ ) op  $\{-1, 1\}$  verdeelde sv'n. Zij  $K \in \mathbb{N}$ , en laat  $S_0$  een sv zijn met waarden in  $I := \{0, \dots, K\}$  en onafhankelijk van de rij  $(Y_i)$ . Definieer nu de sv'n  $S_n$  met  $n \in \mathbb{N}$  recursief door

$$S_{n+1} := \begin{cases} S_n + Y_{n+1} & , \text{ als } S_n + Y_{n+1} \in I, \\ S_n & , \text{ anders.} \end{cases}$$

Dan bewijst men gemakkelijk dat het proces  $(S_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$  een Markov-keten is met toestandsruimte  $I$  (een *Bernoulli-wandeling met elastische grenzen*  $0$  en  $K$ ).

- (i). Bepaal de overgangsmatrix  $\mathcal{P}$  van de keten en geef  $\mathcal{P}$  in matrix-vorm weer.
- (ii). Bewijs, zonder gebruik van (iii), dat de keten een limietverdeling heeft.
- (iii). Los de stationaire vergelijking op voor een (invariante) maat  $\psi$ , en constateer dat de algemene oplossing de vorm  $\psi_j = c\alpha^j$  voor  $j \in I$  heeft, met  $\alpha$  bepaald door  $p$  en  $c$  willekeurig niet-negatief.
- (iv). Bepaal de limietverdeling van de keten; onderscheid twee gevallen met betrekking tot de waarden van  $p$ .

[illegible]

NORMERING:    **1** (i): 2      **2** (i): 3      **3** (i): 3      **4** (i): 1      TOTAAL: 38 punten!

$$(\text{ii}): 2 \qquad (\text{ii}): 2 \qquad (\text{ii}): 2 \qquad (\text{ii}): 2$$

(iii): 3      (iii): 1      (iii): 1      (iii): 2      EINDCIJFER  $T$ :

(iv): 2      (iv): 3      (iv): 2      (iv): 2       $1 + \frac{1}{4} \times \text{totaal.}$

$$\frac{\quad}{9} \quad (v): \frac{3}{12} \quad (v): \frac{2}{10} \quad \frac{\quad}{7}$$

○ ● \* ✱ . ✱ \* ● ○ . ○ ● \* ✱ . ✱ \* ● ○ . ○ ● \* ✱ . ✱ \* ● ○ . ○ ● \* ✱ . ✱ \* ● ○ . ○ ● \* ✱ . ✱ \* ● ○ . ○ ● \* ✱ . ✱ \* ● ○