

Opgave 3. Zij $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ een Markov-keten met startverdeling a en toestandsruimte I .

- (i). Formuleer voor (X_n) de FLS in het positief-recurrente geval, en laat *kort* zien hoe dit bewezen kan worden; doe dit door een geschikte keuze van b in de *koppelingsongelijkheid* (die u niet hoeft te bewijzen, maar wel dient toe te lichten):

$$\sum_{j \in I} |\mathbb{P}_a(X_n = j) - \mathbb{P}_b(X'_n = j)| \leq 2 \mathbb{P}(T_k > n) \quad [n \in \mathbb{N}; k \in I].$$

Een man speelt het volgende spel tegen een oneindig rijke tegenstander. Hij voert onafhankelijke worpen uit met een muntstuk met kans $p \in (0, 1)$ op ‘kruis’ en kans $q := 1 - p$ op ‘munt’. Telkens als hij ‘kruis’ gooit, krijgt hij een euro van zijn tegenstander; bij ‘munt’ verliest hij zijn gehele kapitaal van dat moment. Zij X_n het kapitaal van de man na n worpen (met $X_0 \in \mathbb{Z}_+$ -waardig en onafhankelijk van de worpen).

- (ii). Laat zien dat er (onafhankelijke, alternatief verdeelde) stochastische variabelen $Y_1, Y_2, \dots$ zijn zó dat $X_{n+1} = (X_n + 1) Y_{n+1}$ voor $n \in \mathbb{Z}_+$, bewijs hiermee dat $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ een Markov-keten is, en bepaal de overgangsmatrix $\mathcal{P}$.
- (iii). Bepaal alle invariante maten ψ voor $\mathcal{P}$.
- (iv). Laat zien dat $\mathcal{P}$ irreducibel is, en bepaal met behulp van (iii) de waarden van p waarvoor $\mathcal{P}$ positief-recurrent is.
- (v). Ga na wanneer de keten een limietverdeling heeft, en bepaal deze dan.

Opgave 4. Zij $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ een Markov-keten met toestandsruimte $I = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, startverdeling $a = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{6})$ en overgangsmatrix $\mathcal{P}$ gegeven door de matrix hiernaast. Laat τ_0 de intreetijd van toestand 0 voorstellen, en zij C_1 de klasse van toestand 1 en C_2 die van toestand 2.

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \end{array}$$

- (i). Laat, zonder rekenwerk, zien dat C_1 positief-recurrent is, bepaal de taboe-kans $o p_{0j}^{(n)} := \mathbb{P}_0(X_n = j; \tau_0 \geq n)$ voor $n \in \mathbb{N}$ en $j \in C_1$, en construeer met behulp hiervan een invariante kansmaat met drager C_1 .
- (ii). Laat, door beschouwing van de stationaire vergelijking, zien dat er ook een invariante kansmaat is met drager C_2 , en bepaal deze.
- (iii). Laat, zonder bepaling van intreeverdelingen, zien dat $f_{a0} := \mathbb{P}_a(\tau_0 < \infty) = \frac{5}{9}$.
- (iv). Zij $f_{aC_i} := \mathbb{P}_a(X_n \in C_i \text{ voor een } n \in \mathbb{N})$ voor $i = 1, 2$. Bewijs: $f_{aC_1} + f_{aC_2} = 1$, en bepaal hiermee en met behulp van (iii) de intreekans f_{aj} voor alle $j \neq 4$.
- (v). Laat zien dat de keten een limietverdeling heeft, en bepaal deze.

[illegible]

NORMERING: **1** (i): 2 **2** (i): 3 **3** (i): 2 **4** (i): 3 TOTAAL: 38 punten!

(ii): 2 (ii): 2 (ii): 2 (ii): 1

(iii): 3 (iii): 1 (iii): 2 (iii): 2

$$(iv): 2 \quad (iv): 2 \quad (iv): 2 \quad (iv): 2$$
$$\frac{\quad}{9} \quad (v): \frac{1}{9} \quad (v): \frac{2}{10} \quad (v): \frac{2}{10}$$

EINDCIJFER T :

$$1 + \frac{1}{4} \times \text{totaal}.$$

○●*★・★*●○・○●*★・★*●○・○●*★・★*●○・○●*★・★*●○・○●*★・★*●○・○●*★・★*●○・○●*★・★*●○