



Opgave 1. Zij $(S_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ de *symmetrische* vrije Bernoulli-wandeling (met $S_0 = 0$). Zoals bekend, is de basiskans $u_n := \mathbb{P}(S_n = 0)$ eenvoudig te berekenen en wordt de gf U van de rij $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ gegeven door

$$U(s) = 1/\sqrt{1-s^2}.$$

We zijn geïnteresseerd in het verwachte aantal bezoeken van de wandeling gedurende het tijdsinterval $[0, n]$ aan toestand 0 [tijdstip 0 wordt nu dus meegeteld], dus in $a_n := \mathbb{E}N_n$ met

$$N_n := \#(\{k \in \{0, 1, \dots, n\} : S_k = 0\}).$$

- (i). Schrijf N_n als een som van $n+1$ alternatieven, en laat daarmee zien dat a_n voor $n \in \mathbb{Z}_+$ gegeven wordt door $a_n = \sum_{k=0}^n u_k$.
- (ii). Bepaal $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
- (iii). Druk met behulp van (i) en ‘Fubini’ de gf A van de rij $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ uit in U , en laat, door de afgeleide U' van U te bepalen en deze op geschikte wijze uit te drukken in U , vervolgens zien dat $A(s)$ geschreven kan worden als

$$A(s) = \frac{1+s}{s} U'(s).$$

- (iv). Ontwikkel $A(s)$ in (iii) naar machten van s , en laat zien dat a_n en a_{n+1} voor even n op dezelfde eenvoudige wijze in u_{n+2} uitgedrukt kunnen worden.
- (v). Bepaal met behulp van (iv) de waarde van a_6 (als onvereenvoudigbare breuk).

Opgave 2. Zij $(S_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ de vrije Bernoulli-wandeling (met $S_0 = 0$ en) met parameter $p < \frac{1}{2}$. Zoals bekend, geldt dan voor de terugkeertijd τ van toestand 0 dat

$$\mathbb{P}(\tau < \infty) = 2p.$$

Zij I_r de intreetijd van toestand $r \in \mathbb{N}$, en zij $g = (g_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ de verdeling van I_1 .

- (i). Laat door middel van een combinatorische methode (kort) zien dat voor $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(S_1 > 0; \dots; S_n > 0; S_{n+1} = 0) = \mathbb{P}(S_1 < 0; \dots; S_n < 0; S_{n+1} = 0).$$

- (ii). Laat met behulp van (i) zien dat $\mathbb{P}(\tau = n+1) = 2q g_n$ voor $n \in \mathbb{N}$, en concludeer dat $\mathbb{P}(I_1 < \infty) = p/q$.
- (iii). Druk (zonder bewijs) $\mathbb{P}(I_2 = n)$ voor $n \geq 2$ uit in de verdeling g . Wat is nu $\mathbb{P}(I_2 < \infty)$, en wat is [antwoord volstaat] $\mathbb{P}(I_r < \infty)$ voor $r \in \mathbb{N}$?

Zij M het aantal positieve toestanden dat door de wandeling bezocht wordt; of ook:

$$M = \sup \{S_0, S_1, S_2, \dots\}.$$

- (iv). Bepaal met behulp van (iii) eerst $\mathbb{P}(M = \infty)$, vervolgens $\mathbb{P}(M \geq r)$ voor $r \in \mathbb{N}$, en tenslotte $\mathbb{P}(M = r)$ voor $r \in \mathbb{Z}_+$. Hoe wordt de verdeling van M wel genoemd?

