

Opgave 1.

- (i). Zij $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$ een rij niet-negatieve getallen met $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$, en zij $(r_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$ de staartrij hierbij: $r_k := \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i$. Bewijs met ‘Fubini’ de bekende eigenschap dat de gf R van (r_k) als volgt in de gf A van (a_k) uitgedrukt kan worden:

$$R(s) = \frac{1 - A(s)}{1 - s}.$$

Beschouw de vrije Bernoulli-wandeling $(S_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ (met $S_0 \equiv 0$) met parameter $p < \frac{1}{2}$. Zij, voor $r \in \mathbb{N}$, T_r het tijdstip van r -de terugkeer naar toestand 0, en noteer met $F^{(r)}$ de kgf van T_r . Zoals bekend wordt $F := F^{(1)}$ gegeven door $[q := 1 - p]$

$$F(s) = 1 - \sqrt{1 - 4pqs^2}. \quad (*)$$

- (ii). Druk (zonder bewijs) $F^{(r)}$ uit in F , en bewijs met behulp hiervan en van $(*)$ de bekende eigenschap dat T_r defektief is met $\mathbb{P}(T_r < \infty) = (2p)^r$.

Zij $N := \#(\{n \in \mathbb{N} : S_n = 0\})$, d.i. het *aantal bezoeken* van de wandeling *aan* 0.

- (iii). Laat met behulp van (ii) zien dat N niet-defektief is.
 (iv). Bepaal met behulp van (ii) $\mathbb{P}(N > k)$ voor $k \in \mathbb{Z}_+$, en laat vervolgens zien dat de gf R van de rij $(\mathbb{P}(N > k))_{k \in \mathbb{Z}_+}$ gegeven wordt door

$$R(s) = \frac{2p}{1 - 2ps}.$$

- (v). Bepaal met behulp van (i) en (iv) de kgf van N , en hiermee de kansverdeling van N . Hoe wordt deze verdeling wel genoemd?
 (vi). Bepaal $\mathbb{P}(S_n \neq 0 \text{ voor alle } n \in \mathbb{N})$.

Opgave 2. Zij $(S_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ de *symmetrische* vrije Bernoulli-wandeling (met $S_0 \equiv 0$). Zoals bekend, wordt de gf U van de rij $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ met $u_n := \mathbb{P}(S_n = 0)$ gegeven door

$$U(s) = \frac{1}{\sqrt{1 - s^2}}, \quad (*)$$

en kan de verdeling $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ van de terugkeertijd τ van toestand 0 hieruit gevonden worden met behulp van de zuivere vernieuwingsvergelijking.

- (i). Geef deze vergelijking (zonder bewijs) zowel in termen van de rijen (u_n) en (f_n) als in termen van hun gf's U en F , en laat hiermee en met $(*)$ zien dat

$$f_n = u_{n-2} - u_n \quad [n \in \mathbb{N} \text{ met } n \geq 2].$$

- (ii). Laat met behulp van (i) zien dat $\mathbb{P}(S_1 \neq 0; \dots; S_n \neq 0) = u_n$ voor $n \in \mathbb{N}$ *even*. Beschouw voor *even* $n \in \mathbb{N}$: $V_n := \max\{m \leq n : S_m = 0\}$, dit is het laatste nulpunt van het stochastische pad $(S_0, \dots, S_n)$.

- (iii). Bepaal $\mathbb{P}(V_n = 0)$ en $\mathbb{P}(V_n = n)$.

ZOZ

- (iv). Laat voor $k = 1, \dots, n-1$ zien dat $\mathbb{P}(V_n = k) = u_k u_{n-k}$.
- (v). Welke eigenschap van de verdeling van V_n is, gezien de onderstelde symmetrie van de wandeling, enigszins verrassend?
- (vi). Bepaal de verdeling van V_6 expliciet en geef deze weer in een figuur.

Opgave 3. Zij $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ een Markov-keten met toestandsruimte I , startverdeling $a = (a_i)_{i \in I}$ en overgangsmatrix $\mathcal{P} = (p_{ij})_{i,j \in I}$. Noteer $p_{aj}^{(n)} := \mathbb{P}_a(X_n = j)$.

- (i). Bewijs de vergelijkingen van Chapman-Kolmogorov in gegeneraliseerde vorm: Laat door uitsplitsing naar de waarden van X_m zien dat $p_{aj}^{(m+n)}$ geschreven kan worden in termen van m -staps en n -staps overgangskansen.
- (ii). Bewijs: $p_{aj}^{(m+n)} \geq p_{ai}^{(m)} p_{ij}^{(n)}$ voor $m, n \in \mathbb{Z}_+$ en $i, j \in I$.
- (iii). Zij $N(j) := \#\{n \in \mathbb{N} : X_n = j\}$, dus $N(j)$ is het aantal bezoeken aan j . Druk $\mathbb{E}_a N(j)$ uit in de overgangskansen $p_{aj}^{(n)}$ met $n \in \mathbb{N}$, en laat met behulp hiervan en van (ii) zien dat de volgende implicatie geldt:

$$\mathbb{E}_a N(j) < \infty \implies \mathbb{E}_a N(i) < \infty \text{ voor alle } i \in I \text{ met } i \rightsquigarrow j.$$

Opgave 4. Zij $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ een Markov-keten met toestandsruimte $I = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ en overgangsmatrix $\mathcal{P}$ gegeven door

$$\mathcal{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

- (i). Geef het bij $\mathcal{P}$ behorende 1-staps-schema, en verdeel I met behulp daarvan in klassen van communicerende toestanden.
- (ii). Bepaal de periode van toestand 0.
- (iii). Bepaal de terugkeerverdeling $(f_{44}^{(n)})$ van toestand 4, en laat zien dat 4 voorbijgaand is.
- (iv). Is toestand 0 voorbijgaand of recurrent?

○ ● ★ ★ ★ ● ○ ○ ● ★ ★ ★ ● ○ ○ ● ★ ★ ★ ● ○ ○ ● ★ ★ ★ ● ○ ○ ● ★ ★ ★ ● ○ ○ ● ★ ★ ★ ● ○

NORMERING:	1 (i): 2	2 (i): 2	3 (i): 2	4 (i): 2	TOTAAL: 30 punten.
	(ii): 1	(ii): 2	(ii): 1	(ii): 1	
	(iii): 1	(iii): 1	(iii): 3	(iii): 2	EINDCIJFER:
	(iv): 2	(iv): 2		(iv): 1	$\frac{1}{3} \times \text{totaal}$.
	(v): 2	(v): 1			
	(vi): <u>1</u>	(vi): <u>1</u>			
	9	9	6	6	

○ ● ★ ★ ★ ● ○ ○ ● ★ ★ ★ ● ○ ○ ● ★ ★ ★ ● ○ ○ ● ★ ★ ★ ● ○ ○ ● ★ ★ ★ ● ○ ○ ● ★ ★ ★ ● ○