

○●★☆・★☆☆●○・○●★☆・★★●○・○●★☆・★★●○・○●★☆・★★●○・○●★☆・★★●○・○●★☆・★★●○・○●★☆・★★●○・○●★☆・★★●○・○●★☆・★★●○

Opgave 1. Zij $(S_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ de *symmetrische* vrije Bernoulli-wandeling. Noteer $u_n := \mathbb{P}(S_n = 0)$ voor $n \in \mathbb{Z}_+$, en zij, voor $r \in \mathbb{N}$, T_r het tijdstip van r -de terugkeer naar 0.

- (i). Laat met behulp van het bekende feit dat $\mathbb{P}(T_1 = n) = u_{n-2} - u_n$ voor $n \geq 2$, zien dat $\mathbb{P}(S_1 \neq 0; \dots; S_n \neq 0) = u_n$ voor *even* $n \in \mathbb{N}$.
- (ii). Druk de kgf $F^{(r)}$ van T_r uit in $F := F^{(1)}$, en laat daarmee zien dat

$$F^{(r)}(s)U(s) = s^r U^{(r)}(s),$$

waarbij $U^{(r)}$ de gf is van de rij $(u_n^{(r)})_{n \in \mathbb{Z}_+}$ met $u_n^{(r)} := \mathbb{P}(S_n = r)$ en $U := U^{(0)}$.
Aanwijzing: Gebruik de gemengde vernieuwingsvergelijking en het bekende feit dat $F(s) = s G(s)$ met G de kgf van de intreetijd van toestand 1.

Beschouw voor *even* $n \in \mathbb{N}$: $Z_n := \#(\{k \in \{1, \dots, n\} : S_k = 0\})$, dit is het aantal keren dat het stochastische pad $(S_1, \dots, S_n)$ toestand 0 bezoekt.

- (iii). Bepaal $\mathbb{P}(Z_n = 0)$.
- (iv). Zij $r \in \{1, \dots, \frac{1}{2}n\}$. Laat dan, door uitsplitsing naar de waarden van T_r en met behulp van (i), zien dat $\mathbb{P}(Z_n = r) = (f^{(r)} * u)_n$, dit is het n -de element van de convolutie van de verdeling $f^{(r)} = (f_n^{(r)})_{n \in \mathbb{Z}_+}$ van T_r en de rij $u = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$, en concludeer vervolgens met behulp van (ii) dat

$$\mathbb{P}(Z_n = r) = \mathbb{P}(S_{n-r} = r).$$

- (v). Zet $n = 2m$. Geef met behulp van (iv) een expliciete formule voor $\mathbb{P}(Z_{2m} = r)$ met $r \in \{0, \dots, m\}$, en laat daarmee zien dat Z_{2m} een *dalende* kansdichtheid heeft!

Opgave 2. Zij $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ een Markov-keten met toestandruimte I , startverdeling a en overgangsmatrix $\mathcal{P} = (p_{ij})_{i,j \in I}$. Zij τ_j de intreetijd van toestand j , en noteer

$$p_{aj}^{(n)} := \mathbb{P}_a(X_n = j), \quad f_{aj}^{(n)} := \mathbb{P}_a(\tau_j = n), \quad f_{aj} := \mathbb{P}_a(\tau_j < \infty).$$

- (i). Bewijs door uitsplitsing naar de waarden van τ_j : $p_{aj}^{(n)} = \sum_{k=1}^n f_{aj}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}$ voor $n \in \mathbb{N}$, en laat hiermee zien dat de volgende implicatie geldt:

$$j \text{ absorberend} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} p_{aj}^{(n)} = f_{aj}.$$

- (ii). Veronderstel dat de keten de volgende eigenschappen heeft:
- a. I is eindig en bevat 2 absorberende toestanden k en ℓ ; de overige toestanden zijn voorbijgaand.
 - b. $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_a X_n = c_a$, voor zekere constante c_a .

Bewijs m.b.v. (i) dat de *absorptiekansen* f_{ak} en f_{al} dan gegeven worden door

$$f_{ak} = \frac{c_a - \ell}{k - \ell} \text{ en } f_{al} = \frac{c_a - k}{\ell - k}.$$

Zij $K \in \mathbb{N}$; beschouw verder de keten met $I = \{0, \dots, K\}$ en met $\mathcal{P}$ gegeven door

$$p_{ij} = \binom{K}{j} \left(\frac{i}{K}\right)^j \left(1 - \frac{i}{K}\right)^{K-j} \quad [i, j \in I; 0^0 := 1].$$

- (iii). Laat voor $n \in \mathbb{N}$, door conditionering naar de waarden van X_{n-1} , zien dat $\mathbb{E}_a X_n = \mathbb{E}_a X_{n-1}$.
- (iv). Bepaal nu met behulp van (ii) [verifieer de voorwaarden a en b!] de absorptiekans f_{iK} voor $i \in I$.

Opgave 3. Zij $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ een Markov-keten met toestandsruimte $I = \{0, 1, 2\}$ en met overgangsmatrix $\mathcal{P} = (p_{ij})_{i,j \in I}$ bepaald door

$$p_{00} = \frac{1}{4}; p_{02} = \frac{3}{4}; p_{11} = p_{12} = \frac{1}{6}; p_{20} = p_{22} = \frac{1}{2}.$$

- (i). Schrijf $\mathcal{P}$ in matrix-vorm en klassificeer de toestanden [klassen, (positief-/nul-) recurrentie/transiëntie] op grond van slechts *kwantitatieve* overwegingen.
- (ii). Bepaal de verdeling $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ van de terugkeertijd τ_0 van toestand 0 en laat vervolgens zien dat de kgf F van τ_0 gegeven wordt door

$$F(s) = \frac{1}{2} \frac{s(1+s)}{2-s}.$$

- (iii). Bepaal met behulp van de zuivere vernieuwingsvergelijking, van (ii) en van breuksplitsing de overgangskansen $p_{00}^{(n)}$ met $n \in \mathbb{N}$, laat zien dat $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{00}^{(n)}$ bestaat en bepaal de waarde ervan. Wat is nu $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{02}^{(n)}$?
- (iv). Controleer de limietwaarden van (iii) m.b.v. de ULS en door bepaling van een invariante kansmaat, en laat vervolgens zien dat de keten bij iedere startverdeling a een limietverdeling heeft. Hangt deze van a af?

Opgave 4. Zij $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ een rij van onafhankelijke, alternatief(p) verdeelde sv'n op $\{-1, 1\}$, en laat S_0 een sv zijn met waarden in $I := \mathbb{Z}_+$ en onafhankelijk van de rij (Y_i) . Definieer nu de sv'n S_n met $n \in \mathbb{N}$ recursief door

$$S_{n+1} := (S_n + Y_{n+1})^+ \quad [n \in \mathbb{Z}_+] \quad [x^+ := \max\{x, 0\} \text{ voor } x \in \mathbb{R}].$$

- (i). Laat zien dat $(S_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ een Markov-keten is met toestandsruimte I , en bepaal de overgangsmatrix $\mathcal{P}$.
- (ii). Los de stationaire vergelijking op voor een (invariante) maat ψ , en constateer dat de algemene oplossing de vorm

$$\psi_j = c \alpha^j \quad [j \in I]$$

heeft met α bepaald door p en c willekeurig niet-negatief.

- (iii). Bepaal $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_n = j)$ voor alle $j \in I$.

○ ● * * . * * ● ○ . ○ ● * * . * * ● ○ . ○ ● * * . * * ● ○ . ○ ● * * . * * ● ○ . ○ ● * * . * * ● ○ . ○ ● * * . * * ● ○

NORMERING: **1(i): 1** **2(i): 2** **3(i): 2** **4(i): 3** TOTAAL: 38 punten!

$$(ii): 2 \qquad (ii): 3 \qquad (ii): 2 \qquad (ii): 3$$

(iii): 1 (iii): 2 (iii): 3 (iii): 3 EINDCIJFER T :

(iv): 3 (iv): 2 (iv): 3 $1 + \frac{1}{4} \times \text{totaal.}$

$$\begin{array}{cccc} \text{(v): } 3 & & & \\ \hline 10 & 9 & 10 & 9 \end{array}$$

○ ● * ★ • ★ * ● ○ • ○ ● * ★ • ★ * ● ○ • ○ ● * ★ • ★ * ● ○ • ○ ● * ★ • ★ * ● ○ • ○ ● * ★ • ★ * ● ○ • ○ ● * ★ • ★ * ● ○