



Opgave 1. Zij $(S_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ de vrije Bernoulli-wandeling (met $S_0 \equiv 0$) met parameter p . We willen voor $n \in \mathbb{N}$ de *fluctuatie-kans*

$$\alpha_n := \mathbb{P}(S_1 \leq 0; \cdots; S_n \leq 0)$$

uitdrukken in de (bekende) *terugkeeransen* $f_k := \mathbb{P}(\tau = k)$ met $k \in \mathbb{N}$; hierbij is τ de terugkeertijd van toestand 0. Zet $q := 1 - p$.

(i). Bewijs door middel van een *combinatorische methode* dat

$$f_{k+1} = 2 \mathbb{P}(S_1 < 0; \cdots; S_k < 0; S_{k+1} = 0) \quad [k \in \mathbb{N}],$$

en laat hiermee zien dat als I_1 de intreetijd is van toestand 1, dan is

$$f_{k+1} = 2q \mathbb{P}(I_1 = k) \quad [k \in \mathbb{N}].$$

(ii). Laat met behulp van het tweede deel van (i) zien dat α_n gegeven wordt door

$$\alpha_n = 1 - \frac{1}{2q} \sum_{k=1}^{n+1} f_k.$$

(iii). Beschouw $\alpha := \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$. Geef, in termen van (S_n) , een eventualiteit A met $\alpha = \mathbb{P}(A)$, en bepaal α met behulp van (ii) en een bekende eigenschap van τ .

(iv). Zij $p = \frac{1}{2}$; zoals bekend is dan $f_k = u_{k-2} - u_k$ voor $k \geq 2$, met $u_k := \mathbb{P}(S_k = 0)$. Laat nu met behulp hiervan en van (ii) zien dat en hoe α_n uitgedrukt kan worden in de kansen u_k met $k \in \mathbb{N}$, en controleer met het resultaat de in (iii) gevonden waarde van α (voor $p = \frac{1}{2}$).

Opgave 2. Zij $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ een Markov-keten met toestandsruimte I en overgangsmatrix $\mathcal{P} = (p_{ij})_{i,j \in I}$. Zij i een vaste *positief-recurrente* toestand met intreetijd τ_i en verwachte terugkeertijd $\mu(i)$. Definieer nu $\pi = (\pi_i)_{i \in I}$ door

$$\pi_j := \frac{1}{\mu(i)} \sum_{n=1}^{\infty} i p_{ij}^{(n)} \quad \text{met} \quad i p_{ij}^{(n)} := \mathbb{P}_i(X_n = j; \tau_i \geq n).$$

(i). Laat zien dat π een kansmaat is op I . Wat is de drager van π ?

(ii). Bewijs: $ip_{ik}^{(n+1)} = \sum_{j \neq i} ip_{ij}^{(n)} p_{jk}$ voor $k \in I$ en $n \in \mathbb{N}$, en toon met behulp hiervan aan dat π invariant is voor $\mathcal{P}$.

Beschouw verder het speciale geval met $I = \{0, 1, 2\}$ en met

$$p_{00} = \frac{1}{4}, p_{02} = \frac{3}{4}; p_{10} = \frac{2}{3}, p_{11} = p_{12} = \frac{1}{6}; p_{20} = p_{22} = \frac{1}{2}.$$

(iii). Laat zien dat 0 positief-recurrent is, bepaal de taboe-kansen ${}_0p_{0j}^{(n)}$ voor alle $j \in I$ en $n \in \mathbb{N}$, en construeer met behulp hiervan een invariante kansmaat voor $\mathcal{P}$.

(iv). Bewijs dat de keten een limietverdeling heeft, en laat door berekening zien dat deze niet van de startverdeling afhangt.

Opgave 3. Zij $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ een Markov-keten met toestandsruimte $I = \mathbb{Z}_+$ en met overgangsmatrix $\mathcal{P} = (p_{ij})_{i,j \in I}$ bepaald door [zekere $p \in (0, 1)$, $q := 1 - p$]

$$p_{i,i+1} = p \text{ voor alle } i \in I, \quad p_{00} = p_{11} = p_{i,i-1} = q \text{ voor alle } i \geq 2.$$

- (i). Schrijf $\mathcal{P}$ in matrix-vorm en geef de klassen-indeling van I .
- (ii). Stel de stationaire vergelijking op voor een voor $\mathcal{P}$ invariante maat ψ , vertaal deze in een vergelijking voor de gf $P(s) := \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j s^j$ van ψ , en laat, door oplossing hiervan, zien dat $P(s)$ gegeven wordt door $P(s) = c \cdot qs / (q - ps)$ met $c \geq 0$. Wat is nu ψ_j voor $j \in I$?
- (iii). Bepaal met behulp van (ii) de waarden van p waarvoor de keten een positief-recurrente klasse heeft, en laat zien dat de keten dan een limietverdeling heeft. Wat is deze?

Opgave 4. Zij $(Y_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ een rij van onafhankelijke, $\mathbb{Z}_+$ -waardige, gelijkverdeelde sv'n met verdeling $(q_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$ en kgf Q , en zij X_0 een $\mathbb{Z}_+$ -waardige sv, onafhankelijk van de rij (Y_n) . Definieer nu het proces $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ recursief door

$$X_{n+1} := (X_n - 1)^+ + Y_n \quad [n \in \mathbb{Z}_+],$$

waarbij $r^+ := \max\{r, 0\}$. U herkent wellicht het *wachtrij-proces* van Hoofdstuk VI-A.

- (i). Laat zien dat (X_n) een Markov-keten is met toestandruimte $I = \mathbb{Z}_+$ en met een overgangsmatrix $\mathcal{P} = (p_{ij})_{i,j \in I}$ waarvoor $p_{0k} = q_k$ voor alle $k \in I$.

Zij F de gf van de terugkeerverdeling $(f_{00}^{(n)})$ van toestand 0.

- (ii). Druk $(f_{00}^{(n)})$ uit in de intreeverdelingen $(f_{k0}^{(n)})$ met $k \in \mathbb{N}$ [splits uit naar de waarden van X_1 ; verder geen bewijs], en laat met behulp hiervan en van het inzichtelijke feit dat F^k de gf is van $(f_{k0}^{(n)})$ voor $k \in \mathbb{N}$ [geen bewijs], zien dat F voldoet aan de functionaalvergelijking $F(s) = sQ(F(s))$.

Laat verder (q_k) gegeven zijn door $q_k = p q^k$ voor $k \in \mathbb{Z}_+$, voor zekere $p \in (0, 1)$ en met $q := 1 - p$. De keten is dan *irreducibel* en *aperiodiek*.

- (iii). Bepaal de kgf Q en laat vervolgens door oplossen van de vergelijking in (ii) zien dat F gegeven wordt door $F(s) = (1 - \sqrt{1 - 4pqs})/(2q)$.
- (iv). Onderzoek met behulp van (iii) voor welke waarden van p de keten respectievelijk voorbijgaand, nul-recurrent, positief-recurrent is.
- (v). Bepaal de waarden van p waarvoor de keten een limietverdeling $\psi = (\psi_j)_{j \in I}$ heeft. Wat is dan ψ_0 , en hoe kunnen de overige ψ_j 's in principe bepaald worden?

○●*★・★*●○・○●*★・★*●○・○●*★・★*●○・○●*★・★*●○・○●*★・★*●○・○●*★・★*●○

NORMERING: 1 (i): 3 2 (i): 2 3 (i): 1 4 (i): 2 TOTAAL: 38 punten!

(ii): 2 (ii): 3 (ii): 4 (ii): 2

(iii): 2 (iii): 4 (iii): 3 (iii): 2 EINDCIJFER T :

$$\text{(iv): } 2 \quad \text{(iv): } 2 \quad \text{(iv): } 2 \quad 1 + \frac{1}{4} \times \text{totaal.}$$

(v): 2

9

11

8

10

○ ● *★ • ★*● ○• ○ ● *★• ★*● ○• ○ ● *★• ★*● ○• ○ ● *★• ★*● ○• ○ ● *★• ★*● ○• ○ ● *★• ★*● ○

Deeltentamen-2 en Tentamen Markov-ketens

N.B.: Het deeltentamen betreft slechts de opgaven 2, 3 en 4; tijdsduur: $2\frac{1}{4}$ uur.

[illegible]

Opgave 1. Zij $(S_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ de vrije Bernoulli-wandeling met parameter $p < \frac{1}{2}$. We zijn geïnteresseerd in de kansverdeling van het *aantal bezoeken* $N(r)$ aan $r \in \mathbb{Z}_+$:

$$N(r) := \#(\{n \in \mathbb{N} : S_n = r\}) \quad [r \in \mathbb{Z}_+].$$

Ingeval $r = 0$ maken we gebruik van het bekende feit dat de kgf F van de terugkeertijd T_1 van toestand 0 gegeven wordt door $F(s) = 1 - \sqrt{1 - 4pqs^2}$ met $q := 1 - p$.

- (i). Geef de kgf $F^{(k)}$ van het tijdstip T_k van k -de terugkeer naar 0 (zonder bewijs), en bepaal met behulp hiervan $\mathbb{P}(T_k < \infty)$.
- (ii). Bepaal met behulp van (i) de verdeling van $N(0)$.

Ingeval $r \in \mathbb{N}$ maken we gebruik van het bekende feit dat de kgf G van de intreetijd I_1 van toestand 1 gegeven wordt door $G(s) = F(s)/(2qs)$.

- (iii). Geef de kgf $G^{(r)}$ van de intreetijd I_r van toestand r (zonder bewijs), en bepaal met behulp hiervan $\mathbb{P}(I_r < \infty)$.
- (iv). Laat eerst, door uitsplitsing naar de waarden van I_r , zien dat voor $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(N(r) = k) = \mathbb{P}(I_r < \infty) \mathbb{P}(N(0) = k - 1),$$

en bepaal vervolgens m.b.v. het voorgaande de verdeling van $N(r)$ expliciet.

Opgave 2. Zij $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ een Markov-keten met toestandsruimte $I = \{0, 1, 2, 3\}$ en overgangsmatrix $\mathcal{P} = (p_{ij})_{i,j \in I}$ bepaald door

$$p_{01} = 1; p_{10} = p_{20} = p_{30} = p; p_{12} = p_{23} = p_{31} = q,$$

met zekere $p \in (0, 1)$ en $q := 1 - p$.

- (i). Bepaal de terugkeerverdeling $(f_{00}^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}_+}$ van toestand 0, en laat zien dat de gf F_{00} van deze rij gegeven wordt door

$$F_{00}(s) = \frac{ps^2}{1 - qs}.$$

- (ii). Formuleer en bewijs de zuivere vernieuwingsvergelijking bij toestand 0, bepaal met behulp hiervan en van (i) (en breuksplitsing) de n -staps overgangskansen $p_{00}^{(n)}$ met $n \in \mathbb{Z}_+$, en laat tenslotte zien dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{00}^{(n)} = \frac{p}{1+p}.$$

- (iii). Laat, onder gebruikmaking van een belangrijke stelling, zien hoe de in (ii) gevonden limietwaarde met de stationaire vergelijking gecontroleerd kan worden.

○●*★・★*●○・○●*★・★*●○・○●*★・★*●○・○●*★・★*●○・○●*★・★*●○・○●*★・★*●○・○●*★・★*●○

○ ● * ★ • ★ * ● ○ • ○ ● * ★ • ★ * ● ○ • ○ ● * ★ • ★ * ● ○ • ○ ● * ★ • ★ * ● ○ • ○ ● * ★ • ★ * ● ○