

Vrije Universiteit, Faculteit Exacte Wetenschappen

Tentamen Logica en Verzamelingenleer voor BWI 10 februari 2010

Tentamencijfer = $1 + \frac{\text{totaal}}{10}$

Gebruik van rekenmachine of boek/dictaat is niet toegestaan.

Vermeld op ieder blad dat je inlevert je naam en je studentnummer.

Veel succes!

Opgave 1. (10 punten)

In deze opgave zijn A, B, C deelverzamelingen van een universum V .

- a) Maak Venn-diagrammen voor

$$(A \cup B) \cap C \quad \text{en} \quad A \cup (B \cap C)$$

en geef duidelijk aan welk gebied beschreven wordt.

- b) Laat met behulp van een geschikt voorbeeld zien dat de twee boven genoemde verzamelingen in het algemeen verschillend zijn.

Opgave 2. (10 punten)

Onderzoek met behulp van waarheidstabellen of

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r \quad \text{en} \quad p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$$

logisch equivalent zijn.

Opgave 3. (10 punten)

Gegeven is een verzameling K van koekjes. We schrijven

$B(k, l)$ voor “koekje k smaakt beter dan koekje l ” en

$G(k, l)$ voor “koekje k is groter dan koekje l ”.

- a) Formuleer met kwantoren: “Er is een koekje zodanig dat alle koekjes beter smaken en niet groter zijn dan dit koekje.”
- b) Formuleer de ontkenning (negatie) van de uitspraak uit deel a) met kwantoren. Herschrijf de uitkomst zó, dat het negatie-teken “-”, als je het nodig hebt, alleen voor $B(k, l)$ of $G(k, l)$ staat en nergens anders.

Z.O.Z.

Opgave 4. (10 punten)

Binnen het universum $[0, \infty)$ worden voor $n = 1, 2, 3, \dots$ de intervallen I_n gegeven door

$$I_n = \left[\frac{1}{3n+1}, n^2 \right).$$

Bepaal de verzamelingen

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n^c \quad \text{en} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^c.$$

Het antwoord volstaat.

Opgave 5. (10 punten)

Gegeven is de functie $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ met $f(m, n) = 3m^2 + 2n^2$. Verder is $B \subset \mathbb{Z}$ gegeven als $B = \{1, 2, 3\}$. Bepaal $f^{-1}[B]$. Leg kort uit hoe je aan je antwoord komt.

Opgave 6. (10 punten)

Gegeven zijn een functie $f : U \rightarrow V$ en een functie $g : V \rightarrow W$. Gegeven is verder de samengestelde functie $g \circ f : U \rightarrow W$ met $(g \circ f)(u) = g(f(u))$.

- Bewijs dat $g \circ f$ surjectief is als f en g surjectief zijn.
- Kun je ook concluderen dat f surjectief is als bekend is dat $g \circ f$ surjectief is? Motiveer je antwoord kort.

Opgave 7. (10 punten)

De rij $a_1, a_2, a_3, \dots$ is gegeven door $a_1 = 1$ en $a_n = 4a_{n-1} + 7$ voor $n \geq 2$. Toon met behulp van volledige inductie aan: voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt

$$a_n = \frac{1}{3}(10 \cdot 4^{n-1} - 7).$$

Opgave 8. (10 punten)

Toon met behulp van volledige inductie aan: voor elke $n \in \mathbb{N}$ met $n \geq 3$ geldt

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n < n!$$

Opgave 9. (10 punten)

Anne, Birgit, Chris en Dirk gaan met de lift. Er zijn drie verdiepingen.

- Op hoeveel manieren kunnen ze uitstappen? (Een mogelijkheid is bijvoorbeeld dat Anne en Bob op de eerste verdieping uitstappen, Chris op de tweede verdieping uitstapt en Dirk op de derde verdieping uitstapt.) Leg kort uit hoe je aan je antwoord komt.
- Op hoeveel manieren kunnen ze uitstappen als op iedere verdieping iemand uitstapt? Leg ook hier kort uit hoe je aan je antwoord komt.