

Uitwerking Tentamen Logica en Verzamelingenleer voor BWI, , maandag 9 februari 2009.

1. (a) Dit mag je zelf doen.

(b) [Een gedachtegang: Uit de Venn-diagrammen die je bij onderdeel (a) getekend hebt blijkt dat de twee verzamelingen verschillend zijn. Om dat netjes te bewijzen moet je dus laten zien dat er verzamelingen A , B , C en D bestaan waarvoor geldt dat de verzamelingen $(A \cup B) \setminus (C \cap D)$ en $(A \setminus C) \cup (B \setminus D)$ verschillend zijn.

De Venn diagrammen laten zien dat de verzameling $(A \setminus C) \cup (B \setminus D)$ net iets kleiner is dan $(A \cup B) \setminus (C \cap D)$: het bevat de “stukjes” $(D \cap B) \setminus (A \cup C)$ en $(A \cap C) \setminus (D \cup B)$ niet. Maak dus verzamelingen A , B , C en D waarbij tenminste één van deze stukjes niet leeg is.] Voor bijvoorbeeld

$$A = \{1\}, \quad B = \{1, 3\}, \quad C = \{2\}, \quad \text{en} \quad D = \{3\}.$$

geldt

$$(A \cup B) \setminus (C \cap D) = \{1, 3\} \quad \text{en} \quad (A \setminus C) \cup (B \setminus D) = \{1\}.$$

Hieruit blijkt dat de twee verzamelingen in het algemeen verschillend zijn.

(c) Pas de bewijsstrategie voor het bewijzen van een implicatie toe:

Stel dat geldt $((A \cup C = B \cup C) \wedge (A \cap C = B \cap C))$. We moeten daarmee vervolgens bewijzen dat $A = B$, dus dat $A \subset B$ én $B \subset A$.

Aldus: neem $a \in A$ (we moeten laten zien dat $a \in B$). Dan zeker $a \in A \cup C$. De laatste is volgens de veronderstelling gelijk aan $B \cup C$, dus $a \in B$ (en dan ben je klaar) of $a \in C$. Samen met het feit dat ook $a \in A$ betekent dit dat $a \in A \cup C = B \cup C$. Maar dan moet $a \in B$. Klaar.

Het omgekeerde (dus $b \in B$ levert $b \in A$) gaat analoog.

(d) Let op: als je de eerste en tweede hebt, krijg je de derde en vierde via de wetten van de morgan vrijwel kado omdat

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n^c = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right)^c \quad \text{en} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^c = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \right)^c.$$

Nu de antwoorden:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = (0, 2), \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n^c = (-\infty, 0] \cup [2, \infty) \quad \text{en} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^c = \mathbb{R}.$$

(e) *Te bewijzen:* $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$.

Strategie: Om te laten zien dat een verzameling de lege verzameling is, veronderstel je dat deze een element x bevat en laat je zien dat dat leidt tot een tegenspraak.

Een bewijs: Stel $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Dat betekent dat $x \in I_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. In het bijzonder geldt dat x in $I_1 = (1, 2)$ zit. Maar dan moet $x > 1$.

Omdat $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n}) = 1$, is er een n zo dat $1 < 1 + \frac{1}{n} < x$. Blijkbaar behoort x niet tot I_n . Tegenspraak.

We kunnen concluderen dat $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ geen elementen bevat en dus gelijk is aan de lege verzameling

2. (a) We onderscheiden de volgende atomaire proposities:

dr := “het KNMI voorspelt droog weer”

f := “ik ga fietsen”

$z :=$ “ik ga zwemmen”

$wa :=$ “het KNMI voorspelt warm weer”

Het argument wordt dan:

$$dr \Rightarrow (f \vee z), \quad z \Leftrightarrow w, \quad \neg f \quad \therefore wa.$$

- (b) Het argument klopt niet! In de situatie dat regen en geen warm weer voorspelt wordt en dat ik niet ga fietsen en ook niet ga zwemmen zijn alle premissen waar, maar de conclusie niet. Als je dit niet ziet kun je er via een waarheidstabel voor de drie premissen en de conclusie achter komen. Dit wordt een tabel met 16 regels.

3. (a) De uitspraak is

$$(\forall s \in S \exists d \in D : L(s, d)) \wedge \neg(\exists d \in D \forall s \in S : L(s, d)).$$

Dit voldoet echter niet aan de gestelde eisen. Daarvoor moet het negatie-teken nog binnen de kwantoren gebracht worden. Resultaat:

$$(\forall s \in S \exists d \in D : L(s, d)) \wedge (\forall d \in D \exists s \in S : \neg L(s, d)).$$

4. (a) Ja. Neem maar een waarde $p \in \mathbb{R}$. Als $p \geq 0$, dan bestaat $\sqrt{p}$ en geldt dat $f(\sqrt{p}, 0) = p$. Als $p < 0$, dan is $-p > 0$ en bestaat $\sqrt{-p}$. Nu geldt dat $f(0, \sqrt{-p}) = 0^2 - \sqrt{-p}^2 = 0 - (-p) = p$. Blijkbaar komt elk reëel getal als beeld voor. Dat betekent dat f surjectief is.
- (b) Neen. $f(-2, 0) = 4 = f(2, 0)$. Er zijn dus twee verschillende originelen die hetzelfde beeld hebben. Dat betekent dat f niet injectief is.
- (c) $f[\{0\} \times \mathbb{R}] = (-\infty, 0]$ en $f[\{1\} \times \mathbb{R}] = (-\infty, 1]$ dus $f[A] = (-\infty, 0] \cup (-\infty, 1] = (-\infty, 1]$.
5. Laat $y \in f[A_1 \cap A_2]$ willekeurig gegeven zijn. [We moeten aantonen dat daaruit volgt dat $y \in f[A_1] \cap f[A_2]$.] Dat betekent dat er een $a \in A_1 \cap A_2$ bestaat zo dat $f(a) = y$. Omdat $a \in A_1 \cap A_2$ weten we ook dat $a \in A_1$ en dus $y = f(a) \in f[A_1]$. Ook is $a \in A_2$ waaruit volgt $y \in f[A_2]$. Blijkbaar behoort y tot de twee verzamelingen $f[A_1]$ én $f[A_2]$ en dus tot $f[A_1] \cap f[A_2]$.
6. We bewijzen dit met volledige inductie:
(Basis) Voor $n = 1$ geldt

$$\sum_{k=2}^{2n+1} (3k-1) = \sum_{k=2}^3 (3k-1) = 5 + 8 = 13 \quad \text{en } n(6n+7) = 13.$$

De uitspraak is dus geldig voor $n = 1$.

(Inductiestap) Neem $n \in \mathbb{N}$ willekeurig en veronderstel dat de uitspraak geldig is voor deze n , dus dat

$$\sum_{k=2}^{2n+1} (3k-1) = n(6n+7).$$

We tonen aan dat de uitspraak dan ook geldig is voor $n+1$, dus te bewijzen

$$\sum_{k=2}^{2n+3} (3k-1) = (n+1)(6n+13).$$

Welnu,

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{2n+3} (3k-1) &= \sum_{k=2}^{2n+1} (3k-1) + (3(2n+2)-1) + (3(2n+3)-1) \\ &\stackrel{!}{=} n(6n+7) + 6n+5 + 6n+8 = 6n^2 + 19n + 13.\end{aligned}$$

Anderzijds geldt

$$(n+1)(6n+13) = 6n^2 + 13n + 6n + 13 = 6n^2 + 19n + 13,$$

waarmee het bewezen is voor $n+1$.

Het bewijsprincipe van volledige inductie geeft nu dat de uitspraak geldig is voor alle n .

7. Merk op dat volgens het binomium van Newton geldt

$$\sum_{k=0}^{21} \binom{21}{k} (-5)^k 4^{21-k} = (-5+4)^{21} = (-1)^{21} = -1.$$

Dus

$$-1 = \binom{21}{0} (-5)^0 4^{21-0} + \sum_{k=1}^{21} \binom{21}{k} (-5)^k 4^{21-k} = 4^{21} + \sum_{k=1}^{21} \binom{21}{k} (-5)^k 4^{21-k}$$

zodat

$$\sum_{k=1}^{21} \binom{21}{k} (-5)^k 4^{21-k} = -4^{21} - 1$$

8. (a) Dit is hetzelfde als trekken van 25 boeken uit een verzameling van 25 boeken met volgorde zonder teruglegging. Hiervoor zijn $25!$ mogelijkheden.
Je kunt ook als volgt tellen: voor het eerste boek dat je neerzet heb je 25 keuzen, voor het tweede nog 24, enzovoorts. In totaal dus $25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 25!$ mogelijkheden.
Of: het is het aantal rangschikkingen (permutaties) van 25 verschillende boeken, dus $25!$.
- (b) Dit is hetzelfde als trekken van 12 boeken uit een verzameling van 25 boeken met volgorde zonder teruglegging. Hiervoor zijn $\binom{25}{12} \cdot 12! = 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot \dots \cdot 13$ mogelijkheden.
Je kunt ook als volgt tellen: voor het eerste boek dat je neerzet heb je 25 keuzen, voor het tweede nog 24, enzovoorts, totdat je er 12 neergezet hebt. Dus $25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot \dots \cdot 13$ mogelijkheden.
- (c) Nu moet je weer 12 boeken trekken uit 25, zonder terugleggen en de volgorde waarin je ze trekt doe niet terzake. Je moet ze immers op alfabetische volgorde rangschikken. Trek er dus 12 uit 25 zonder terugleggen en zonder volgorde (dat geeft $\binom{25}{12}$ manieren) en rangschik ze vervolgens op alfabetische volgorde (1 manier). In totaal zijn er dus $\binom{25}{12} \cdot 1$ mogelijkheden.