

Uitwerking Oefententamen Logica en Verzamelingenleer voor BWI, , vrijdag 19 december 2008.

1. (a) Dit mag je zelf doen.
 (b) [Een gedachtegang: Uit de Venn-diagrammen die je bij onderdeel (a) getekend hebt blijkt waarschijnlijk dat de twee verzamelingen verschillend zijn. De verzameling $(A \setminus C) \cup (B \setminus D)$ is net iets groter dan $(A \cup B) \setminus (C \cup D)$: het bevat de “stukjes” $(A \cap B \cap C) \setminus D$ en $(A \cap B \cap D) \setminus C$ extra. Maak dus verzamelingen A , B , C en D waarbij deze stukjes niet leeg zijn.]
 Voor bijvoorbeeld

$$A = \{1, 2\}, \quad B = \{1, 2\}, \quad C = \{1\}, \quad \text{en} \quad D = \{2\}.$$

geldt

$$(A \cup B) \setminus (C \cup D) = \emptyset \quad \text{en} \quad (A \setminus C) \cup (B \setminus D) = \{1, 2\}.$$

Hieruit blijkt dat de twee verzamelingen in het algemeen verschillend zijn.

- (c) $A \not\subset B$ betekent dat A tenminste één element bevat dat niet tot B behoort. Dus

$$\exists x \in V : x \in A \wedge \neg(x \in B).$$

- (d) Let op: als je de eerste en tweede hebt, krijg je de derde en vierde via de wetten van de morgan vrijwel kado omdat

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n^c = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right)^c \quad \text{en} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^c = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \right)^c.$$

Nu de antwoorden:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{1\}, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = (0, 2], \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n^c = (-\infty, 0] \cup (2, \infty) \quad \text{en} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^c = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

- (e) *Te bewijzen:* $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{1\}$.
Aldus: We laten eerst zien dat $\{1\} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$, wat equivalent is met aantonen dat voor allen $n \in \mathbb{N}$ geldt dat $1 \in I_n$. Maar dat is duidelijk (want $\frac{1}{n} \leq 1 \leq 1 + \frac{1}{n}$).
 Nu laten we zien dat $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \subset \{1\}$. Neem daartoe $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ willekeurig. Dat betekent dat $x \in I_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. In het bijzonder geldt dat x in $I_1 = [1, 2]$ zit, dus $x \geq 1$.
 We laten nu zien dat $x = 1$ door te veronderstellen dat $x > 1$ en vervolgens een tegenspraak af te leiden. Stel dus dat $x > 1$. Omdat $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n}) = 1$, is er een n zo dat $1 < 1 + \frac{1}{n} < x$. Blijkbaar behoort x niet tot I_n . Tegenspraak.

2. (a) We onderscheiden de volgende atomaire proposities:

sp := “de rockband kan spelen”

bl := “het bier wordt te laat geleverd”

f := “het feest gaat door”

ob := “de organisator is boos”

gt := “het geld wordt terugbetaald”

Het argument wordt dan:

$$(\neg sp \vee bl) \Rightarrow (\neg f \wedge ob), \quad \neg f \Rightarrow gt, \quad \neg gt \quad \therefore sp.$$

- (b) De volgende aaneenschakeling van argumenten laat zien dat uit de premissen sp geconcludeerd kan worden:

$\neg f \Rightarrow gt, \quad \neg gt \quad \therefore \neg \neg f$ (modus tollens)
 $\neg \neg f \quad \therefore f$ (involutie)
 $f \quad \therefore f \vee \neg ob$ (of introductie)
 $f \vee \neg ob \quad \therefore \neg(\neg f \wedge ob)$ (de morgan)
 $(\neg sp \vee bl) \Rightarrow (\neg f \wedge ob), \quad \neg(\neg f \wedge ob) \quad \therefore \neg(\neg sp \vee bl)$ (modus tollens)
 $\neg(\neg sp \vee bl) \quad \therefore sp \wedge \neg bl$ (de morgan)
 $sp \wedge \neg bl \quad \therefore sp$ (conjunctieve simplificatie).

3. (a) Hier staat dat bij elke x uit het interval $[-1, 1]$ minstens één y bestaat zo dat (x, y) op de kromme K ligt. De cirkel met middelpunt $(0, 0)$ en straal 1 voldoet hier aan. Deze cirkel is echter niet de grafiek van een functie. Voor een functie f geldt immers dat bij elke x *precies* één y hoort zo dat $y = f(x)$, wat wil zeggen dat bij elke x *precies* één y hoort zo dat (x, y) op de grafiek van f ligt.
- (b) Dat betekent dat de kromme volledig onder de horizontale lijn op hoogte z ligt.
4. (a) Neen, want niet elke $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ komt als beeld voor. Er is bijvoorbeeld geen $x \in \mathbb{R}$ waarvoor geldt dat $f(x) = (0, 5)$. Immers: stel zo'n x bestaat wel. Voor deze x geldt dan dat $2x - 4 = 0$ én $-x + 1 = 5$, dus $x = 2$ én $x = -4$. Tegenspraak. Blijkbaar bestaat zo'n x niet.
- (b) Waar. We laten zien dat voor alle x en y in $\mathbb{R}$ geldt: $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$. Neem daartoe x en y in $\mathbb{R}$ willekeurig en stel dat $f(x) = f(y)$. Dat betekent dat $(2x - 4, -x + 1) = (2y - 4, -y + 1)$. Dus $2x - 4 = 2y - 4$ én $-x + 1 = -y + 1$. Hieruit volgt eenvoudig dat $x = y$, waarmee het bewezen is.
- (c) De volgende redenering toont aan dat $f^{-1}[A] = \{1, 2\}$.

$$\begin{aligned}
 x \in f^{-1}[A] &\iff f(x) \in A \\
 &\iff (2x - 4, -x + 1) \in (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R}) \\
 &\iff ((2x - 4, -x + 1) \in \mathbb{R} \times \{0\}) \vee ((2x - 4, -x + 1) \in \{0\} \times \mathbb{R}) \\
 &\iff -x + 1 = 0 \vee 2x - 4 = 0 \\
 &\iff x = 1 \vee x = 2 \\
 &\iff x \in \{1, 2\}
 \end{aligned}$$

5. (a) Je moet dus laten zien dat er een functie $f : V \rightarrow W$ en een deelverzameling A van V bestaan zo dat $f(x)$ in $f[A]$ niet betekent dat $x \in A$. Er zijn vele voorbeelden te bedenken, zoals $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met voorschrift $f(x) = x^2$, $A = [0, 1]$ en $x = -1$. Dan $f(x) = 1 \in [0, 1] = f[A]$, maar $x \notin A$.
- (b) Stel f is injectief. We laten zien dat dan voor alle $A \subset V$ geldt dat $f^{-1}[f[A]] \subset A$. Neem dus $A \subset V$ willekeurig en pak $x \in f^{-1}[f[A]]$. Dat betekent dat $f(x) \in f[A]$. Volgens onderdeel (a) mag je hieruit niet concluderen dat $x \in A$! Het betekent dat er een $a \in A$ is, zo dat $f(x) = f(a)$. Uit de injectiviteit van f volgt vervolgens dat x en a gelijk moeten zijn. Blijkbaar behoort x tot A . Einde bewijs.

6. We bewijzen dit met volledige inductie:

(Basis) Voor $n = 1$ geldt

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^1 a_k = a_1 = 1 \quad \text{en} \quad a_{n+2} - 1 = a_3 - 1 = 2 - 1 = 1,$$

want $a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$. De uitspraak is dus geldig voor $n = 1$.

(Inductiestap) Neem $n \in \mathbb{N}$ willekeurig en veronderstel dat de uitspraak geldig is voor deze n , dus dat $\sum_{k=1}^n a_k = a_{n+2} - 1$. We tonen aan dat de uitspraak dan ook geldig is voor $n + 1$, dus te bewijzen

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k = a_{(n+1)+2} - 1.$$

Welnu,

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k = \sum_{k=1}^n a_k + a_{n+1} \stackrel{!}{=} a_{n+2} - 1 + a_{n+1} = (a_{n+1} + a_{n+2}) - 1 = a_{n+3} - 1,$$

waarmee het bewezen is voor $n + 1$.

Het bewijsprincipe van volledige inductie geeft nu dat de uitspraak geldig is voor alle n .

7. (a) Een getal van dit type maak je door voor het eerste cijfer een trekking te doen uit $V = \{3, 5, 8\}$, voor het tweede cijfer ook, enzovoorts. Het aantal is dus gelijk aan het aantal trekkingen uit V ter grootte 4, met volgorde, met teruglegging. Het aantal is dus $3^4 = 81$. Een andere manier van tellen: voor het eerste cijfer heb je drie keuzes. Bij elk van deze keuzes heb je voor het tweede cijfer ook weer drie keuzes, enzovoorts. In totaal heb je dus $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$ keuzes.
- (b) Dit soort getallen kun je maken door een greep van vier te doen uit $V = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, dus een trekking zonder teruglegging, zonder volgorde. Dat kan op $\binom{10}{4}$ manieren. De vier getrokken getallen leg je vervolgens van klein naar groot neer. Dat kan op slechts één manier. Conclusie: Er zijn $\binom{10}{4}$ van dit soort getallen.
- (c) Nu moet je weer vier getallen trekken uit $V = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, zonder volgorde maar met teruglegging (want een cijfer mag meerdere keren voorkomen). Dit kan op $\binom{10+4-1}{9} = \binom{10+4-1}{3}$ manieren. Vervolgens moet je de gekozen cijfers van klein naar groot ordenen, wat maar op één manier kan!

Je kunt het ook als volgt aanpakken. Maak tien bakken genummerd van 0 tot en met 9 en neem vier identieke ballen. Verdeel die vier ballen over de tien bakken, waarbij een bak meerdere ballen mag bevatten. De cijfers van het getal zijn dan de nummers van de bakken die ballen gekregen hebben, waarbij een bak met n ballen een rijtje van n gelijke cijfers oplevert. Dit komt neer op het op een rij plaatsen van negen “schotjes” (de scheidingen tussen de bakken) en vier punten. In totaal heb je dus $9 + 4 = 13$ plaatsen waaruit je er 9 moet kiezen voor de schotjes (en de resterende vier voor de punten) of andersom. In totaal zijn er dus $\binom{13}{9} = \binom{13}{4}$ mogelijkheden.