



Oefententamen Logica en Verzamelingenleer voor BWI
vrijdag 19 december 2008, 15.15 - 17.15 uur.

ELK ANTWOORD DIENT TE WORDEN BEARGUMENTEERD.

Er mogen geen hulpmiddelen als rekenmachines, mobiele telefoons, laptops en dergelijke gebruikt worden.

Het aantal te behalen punten is per onderdeel in de kantlijn vermeld. Het tentamencijfer wordt bepaald door bij het aantal behaalde punten vier op te tellen en vervolgens te delen door vier.

- (2) 1. (a) Maak een Venn-diagram voor elk van de formules

$$(A \cup B) \setminus (C \cup D) \quad \text{en} \quad (A \setminus C) \cup (B \setminus D)$$

en geef duidelijk aan welk gebied beschreven wordt door de formules.

- (2) (b) Zijn de twee bij onderdeel (a) gegeven verzamelingen gelijk? Geef een bewijs dat geen gebruik maakt van Venn-diagrammen.
- (2) (c) “Voor de verzamelingen A en B in een universum V geldt dat $A \not\subset B$.”
Maak met de atomaire proposities “ $x \in A$ ”, “ $x \in B$ ”, geschikte kwantoren (te kiezen uit $\forall x \in V$ en $\exists x \in V$) en voegwoorden (te kiezen uit “ $\wedge$ ”, “ $\vee$ ” en “ $\neg$ ”) een samengestelde uitspraak die dit uitdrukt.
- (3) (d) Binnen het universum $\mathbb{R}$ worden voor $n = 1, 2, \dots$ de intervallen $I_n = [\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}]$ gegeven. Bepaal de verzamelingen

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n^c \quad \text{en} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^c.$$

De antwoorden volstaan.

- (2) (e) [Dit onderdeel is een *bonusopgave*, die je dus alleen moet maken als je nog tijd hebt]
Bewijs dat de verzameling $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ uit onderdeel (d) inderdaad gelijk is aan het door jou gegeven antwoord.

2. Gegeven is het volgende argument:

Als de rockband niet kan spelen of het bier te laat geleverd wordt, dan kan het nieuwjaarsfeestje niet door gaan en is de organisator boos. Als het feestje niet door gaat, dan moet geld terugbetaald worden. Er wordt geen geld terugbetaald. Blijkbaar kan de rockband spelen.

- (2) (a) Maak vijf atomaire proposities “sp”, “bl”, “f”, “ob”, “gt” en zet het argument daarmee om naar zijn logische argumentvorm.
- (2) (b) Geef een bewijs als het argument klopt. Leg anders uit waarom het niet klopt.

3. Met een “kromme” in het platte vlak bedoelen we hier een (eventueel) gekromde lijn die je met een pen kunt tekenen. Hij mag oneindig lang zijn. Voorbeelden zijn rechte lijnen, parabolen, cirkels, ellipsen, grafieken van reëelwaardige functies waarvan het domein een deelverzameling van $\mathbb{R}$ is, etc. We formuleren het predicaat $K(x, y) :=$ “het punt (x, y) ligt op kromme K ”.

(2) (a) Voor een kromme K in $[-1, 1] \times \mathbb{R}$ geldt

$$\forall x \in [-1, 1], \exists y \in \mathbb{R} : K(x, y)$$

Is zo’n kromme de grafiek van een functie $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$? Leg uit!

(2) (b) Van een kromme K in $\mathbb{R}^2$ is gegeven

$$\exists z \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : (y \geq z \Rightarrow \neg K(x, y)).$$

Wat betekent dit voor de kromme K ?

4. Gegeven is de functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ met voorschrift $f(x) = (2x - 4, -x + 1)$

(2) (a) Is f surjectief? Bewijs dit netjes.

(2) (b) Is f injectief? Bewijs ook dit netjes.

(2) (c) Bepaal $f^{-1}[A]$ als $A = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$. Het antwoord volstaat.

5. Laat zien dat voor functies $f : V \rightarrow W$

(2) (a) de uitspraak “ $\forall A \subset V : (f(x) \in f[A] \Rightarrow x \in A)$ ” in het algemeen niet waar is.

(2) (b) de uitspraak “ f injectief $\Rightarrow (\forall A \subset V : f^{-1}[f[A]] \subset A)$ ” altijd waar is.

- (3) 6. Voor de rij $a_1, a_2, a_3, \dots$ van Fibonacci geldt $a_1 = 1, a_2 = 1$ en $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ voor $n \geq 3$. Toon aan: voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt dat

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_{n+2} - 1.$$

7. We beschouwen de 10.000 getallen met vier cijfers (dus de getallen 0000, 0001, 0002 tot en met 9999). Beantwoord de volgende vragen. Een korte uitleg is gewenst.

(2) (a) Hoeveel getallen bevatten hooguit de cijfers 3, 5 en 8?

(2) (b) Van hoeveel getallen lopen de cijfers op in grootte (zoals 2458 en 6789)?

(2) (c) Van hoeveel getallen lopen de opeenvolgende cijfers niet af in grootte (zoals 2448 en 7777)?