

Tentamen Logica en Modelleren

19 december 2013

Opgave 1. (*4 + 4 + 4 punten*)

Leid met natuurlijke deductie af:

- (a) $\neg p \wedge q, q \rightarrow r \vdash r \wedge \neg p$
- (b) $p \rightarrow q, p \vee r \vdash q \vee r$
- (c) $\neg(\neg p \rightarrow q) \vdash \neg p$

Opgave 2. (*3 + 2 + 3 + 3 punten*)

Beschouw de formule

$$\phi : \exists x(Rvx \wedge \forall y(Rxy \rightarrow \neg Ryz))$$

- (a) Teken de parse tree van de formule ϕ .
- (b) Onderstreep de vrije variabelen in ϕ .

Het model $\mathcal{M}$ heeft als domein de verzameling $\{1, 2, 3, 4, 5\}$; het predikaat-symbool R wordt geïnterpreteerd als $<$.

- (c) Specificeer een look-up functie l voor de vrije variabelen van ϕ zodanig dat $\mathcal{M} \models_l \phi$.
- (d) Specificeer een look-up functie l voor de vrije variabelen van ϕ zodanig dat $\mathcal{M} \not\models_l \phi$.

Opgave 3. (*4 + 4 + 4 punten*)

Leid met natuurlijke deductie af:

- (a) $\forall x(Px \rightarrow Qx), \exists x\neg Qx \vdash \exists x\neg Px$
- (b) $\neg\exists x(Px \vee Qx) \vdash \forall x\neg Qx$
- (c) $\forall x\forall y(x = y), Pa \vdash Pb$

Opgave 4. (4 + 4 punten)

De volgende semantische implicaties zijn ongeldig. Laat dit zien door het aangeven van tegenmodellen.

(a) $\exists x \forall y Rxy \models \forall x \forall y (Rxy \vee Ryx)$

(b) $\neg \exists x \forall y Rxy, \forall x Rxx \models \exists x \exists y (\neg Rxy \wedge \neg Ryx)$

Opgave 5. (4 + 4 + 4 punten)

Vertaal onderstaande zinnen in de taal van de predikatenlogica.

Domein mensen, vertaalsleutel:

a: Abe

c: Chris

r: Renske

Bxy: x bewondert y

Vxy: x is vriend van y

(a) Renske wordt door meerdere van haar vrienden bewonderd.

(b) Chris bewondert al zijn vrienden die zichzelf niet bewonderen.

(c) Abe bewondert niemand behalve zichzelf.

Opgave 6. (4 punten)

In een database van de post bevindt zich een tabel *Brieven* met kolommen *Id*, *Datum*, *Afzender*, *Geadresseerde*, waarin alle verzonden brieven worden geadministreerd.

In het relatiemodel representeren we deze tabel door het predikaatsymbool B , zodat $B(x, y, z, w)$ uitdrukt:

“ x is de identifier van een brief die op dag y door z aan w is verstuurd”

Anna wordt aangeduid met de constante a .

Geef een query in de vorm van een formule met vrije variabele x naar:

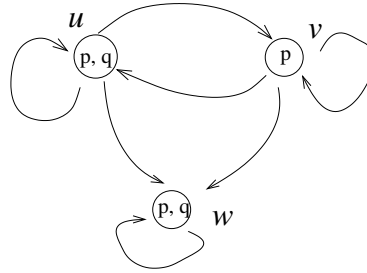
de dagen x waarop Anna meerdere brieven aan eenzelfde persoon heeft verstuurd.

Opgave 7. (8 + 4 punten)

- (a) Ga voor de volgende twee verzamelingen formules na of ze consistent zijn. Leg je antwoorden kort uit, waar mogelijk met een model.
- (i) $\{\forall x \exists y Rxy, \forall x \forall y (Rxy \rightarrow \neg Ryx), \forall x \forall y \forall z (x = y \vee x = z \vee y = z)\}$
- (ii) $\{\forall x \exists y Rxy, \forall x \forall y (Rxy \rightarrow \neg Ryx),$
 $\forall x \forall y \forall z \forall w (x = y \vee x = z \vee x = w \vee y = z \vee y = w \vee z = w)\}$
- (b) Stel dat voor de formules ϕ_1, ϕ_2, ψ geldt dat $\phi_1, \phi_2 \models \psi$ en $\phi_1, \phi_2 \models \neg \psi$. Zijn ϕ_1, ϕ_2 dan consistent, inconsistent, of kun je er niets van zeggen? (Motiveer je antwoord.)

Opgave 8. (3 + 3 + 3 + 3 punten)

Gegeven is het Kripke model $\mathcal{M} = (W, R, L)$ met als onderliggend frame $\mathcal{F} = (W, R)$, getekend in het volgende plaatje.



- (a) Geef (zonder motivering) aan voor welke werelden x geldt:
- (i) $\mathcal{M}, x \models \Diamond \neg q$
- (ii) $\mathcal{M}, x \models \Box q$
- (iii) $\mathcal{M}, x \models \Box q \rightarrow \Diamond \neg p$
- (b) Welke van de volgende frame-eigenschappen heeft $\mathcal{F}$?
- reflexief, symmetrisch, transitief, voortzettend (serial), functioneel*
- (c) Geef als dat mogelijk is een labelingfunctie L' op het frame $\mathcal{F}$, zodanig dat voor het Kripke-model $\mathcal{M}' = (W, R, L')$ geldt: $\mathcal{M}' \not\models \Diamond \neg p \rightarrow \neg p$. Als zo'n L' niet bestaat geef dan kort aan waarom niet.
- (d) Geef als dat mogelijk is een labelingfunctie L'' op het frame $\mathcal{F}$, zodanig dat voor het Kripke-model $\mathcal{M}'' = (W, R, L'')$ geldt: $\mathcal{M}'' \not\models \Box \neg p \rightarrow \neg p$. Als zo'n L'' niet bestaat geef dan kort aan waarom niet.

Opgave 9. *(2 + 2 + 3 punten)*

- (a) Formuleer de Correctheidstelling voor de predikatenlogica.
- (b) Wanneer heet een tweetal formules φ_1, φ_2 syntactisch consistent?
- (c) Gebruik de Correctheidstelling om te bewijzen dat uit de aanname dat er een model $\mathcal{M}$ is zodat $\mathcal{M} \models \varphi_1$ en $\mathcal{M} \models \varphi_2$ volgt dat het tweetal formules φ_1, φ_2 syntactisch consistent is.

Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.