

Voortentamen Logica en Modelleren

29 september 2010

Opgave 1. *(7 + 7 + 7 punten)*

Leid met natuurlijke deductie (ND) af:

- (a) $p \rightarrow (p \rightarrow q) \vdash p \rightarrow (p \wedge q)$
- (b) $(q \vee r) \rightarrow \neg p \vdash (p \wedge q) \rightarrow s$
- (c) $q \rightarrow r, p \rightarrow s \vdash (p \vee q) \rightarrow (r \vee s)$

Opgave 2. *(3 + 3 + 3 punten)*

Beschouw de formule $\forall y(\exists x Rxy \wedge (Rxz \rightarrow Py))$

- (a) Teken de parse tree van deze formule.
- (b) Onderstreep in de formule de vrije variabelen.
- (c) Substitueer in de formule de variabele z door de term $f(y)$.
[NB: zorg daarbij indien nodig door herbenoeming van variabelen dat er geen “clash” optreedt.]

Opgave 3. *(8 + 8 punten)*

Leidt met natuurlijke deductie (ND) af:

- (a) $\exists x Bx, \forall x(Ax \rightarrow \neg Bx) \vdash \exists x \neg Ax$
- (b) $\forall x \neg \exists y Rxy \vdash \forall x \forall y \neg Rxy$

Opgave 4. *(7 + 7 punten)*

De volgende semantische implicaties zijn ongeldig. Laat dit zien door het aangeven van een tegenmodel.

- (a) $\exists x Ax, \exists x Bx, \forall x(Ax \rightarrow \neg Bx) \models \forall x(Ax \vee Bx)$
- (b) $\exists y \forall x Rxy, \neg \forall x Rxx \models \forall x \forall y(Rxy \vee Ryx)$

Opgave 5. (4 + 4 + 4 punten)

Geef voor elk van de volgende verzamelingen formules aan of ze consistent zijn. Geef in het geval van consistentie een model dat de formules waar maakt.

- (i) $\{\forall xPx, \forall xQx, \exists x(\neg Px \vee \neg Qx)\}$
- (ii) $\{\forall x(Px \vee Qx), \exists x\neg Px, \exists x\neg Qx\}$
- (iii) $\{\forall x(Skx \rightarrow Sxx), \forall x(\neg Skx \rightarrow Sxx)\}$

Opgave 6. (4 + 4 + 4 punten)

Gegeven is de formule ϕ : $\forall x(\exists yRxy \rightarrow \forall yRxy)$

Geef voor elk van de volgende modellen $\mathcal{M}_i$ aan of $\mathcal{M}_i \models \phi$. Geef alleen een korte motivatie voor de gevallen waarin het *niet* waar is

- (a) Het model $\mathcal{M}_1$ met domein $A_1 = \{a, b, c\}$ en $R^{\mathcal{M}_1} = \{(b, c), (a, b), (c, b)\}$.
- (b) Het model $\mathcal{M}_2$ met domein $A_2 = \{a, b, c\}$ en $R^{\mathcal{M}_2} = \{(b, c), (b, b), (b, a)\}$.
- (c) Het model $\mathcal{M}_3$ met domein $A_3 = \{a, b, c, d\}$ en $R^{\mathcal{M}_3} = \{(b, c), (b, b), (b, a)\}$.

Opgave 7. (3 + 3 punten)

Gebruik in deze opgave, naast eventueel kwantoren en logische connectieven, alleen de tweepplaatsige predikaatletter R .

- (a) Geef een voorbeeld van een formule ϕ zodanig dat noch $\forall xRxx \models \phi$, noch $\forall xRxx \models \neg\phi$.
(Anders gezegd: zowel $\forall xRxx \not\models \phi$ als $\forall xRxx \not\models \neg\phi$. Tegenmodellen!)
- (b) Bestaat er ook een formule ψ waarvoor geldt dat zowel $\forall xRxx \models \psi$ als $\forall xRxx \models \neg\psi$? Motiveer je antwoord.

Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.