

Tentamen Logica en Modelleren

7 januari 2010

Opgave 1. (6 + 6 punten)

Leid met natuurlijke deductie af:

- (a) $p \rightarrow q, \neg(r \wedge q) \vdash p \rightarrow \neg r$
- (b) $\neg(p \rightarrow q) \vdash p$

Opgave 2. (2 + 3 + 3 punten)

Beschouw het model $\mathcal{M}$ met als domein de verzameling $\{1, 2, 3, 4\}$ en waarin het predikaatsymbool R wordt geïnterpreteerd als $<$.

- (a) Onderstreep de vrije variabelen in de formule $\exists x \exists y (x \neq y \wedge Rxx \wedge Ryz)$.
- (b) Kies een waarde $l(z)$ voor de look-up functie l zodat zal gelden

$$\mathcal{M} \models_l \exists x \exists y (x \neq y \wedge Rxx \wedge Ryz)$$

- (c) Kies een waarde $l(z)$ voor de look-up functie l zodat

$$\mathcal{M} \not\models_l \exists x \exists y (x \neq y \wedge Rxx \wedge Ryz)$$

Opgave 3. (5 + 5 punten)

Leidt met natuurlijke deductie af:

- (a) $\forall x Rxx \vdash \forall x \exists y Rxy$
- (b) $\forall x Px, \exists x (\neg Px \vee Qx) \vdash \exists x Qx$

Opgave 4. (5 + 5 punten)

De volgende semantische implicaties zijn ongeldig. Laat dit zien door het aangeven van een tegenmodel.

- (a) $Pc, \neg Pd \models \forall x (Px \rightarrow x = c)$
- (b) $\exists x \forall y Rxy, \forall x Rxx \models \forall x \forall y (Rxy \vee Ryx)$

Opgave 5. (4 + 4 + 4 punten)

Vertaal de onderstaande zinnen in de taal van de predikatenlogica. Gebruik daarbij de vertaalsleutel

a: Abe
r: Renske
Kxy: x kent y
Fx: x is Fries
Mx: x is een meisje

- (a) Er zijn verschillende Fries meisjes die Renske wel kennen maar Abe niet.
- (b) Wie alle Friese meisjes kent, kent zichzelf niet.
- (c) Alle Friese meisjes behalve Renske kennen Abe.

Opgave 6. (4 + 4 punten)

In een database van de post bevindt zich een tabel *Brieven* met kolommen *Id*, *Datum*, *Afzender*, *Geadresseerde*, waarin alle verzonden brieven worden geadministreerd. In het relatiemodel representeren we deze tabel door het predikaatsymbool B , zodat $B(x, y, z, w)$ uitdrukt:

“ x is de identifier van een brief die op dag y door z aan w is verstuurd”

Anna wordt aangeduid met de constante a .

Geef queries in de vorm van formules met een vrije variabele x naar:

- (a) de dagen x dat er meerdere brieven zijn verstuurd.
- (b) de personen x die nooit een brief van Anna hebben gekregen.

Opgave 7. (4 + 4 punten)

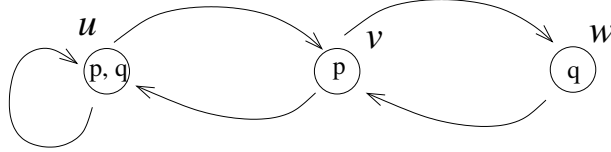
In deze opgave werken we binnen een vaste predikaatlogische taal, met één unair predikaatsymbool P en twee constanten, c en d .

1. Ga na of $Pc, \neg Pd \models c \neq d$.
2. Geef een formule φ zodanig dat zowel de verzameling $\{Pc, \neg Pd, \varphi\}$ als de verzameling $\{Pc, \neg Pd, \neg\varphi\}$ consistent zijn.

Motiveer uw antwoorden.

Opgave 8. (6 + 4 + 4 punten)

Gegeven is het Kripke model $\mathcal{M} = (W, R, L)$ met als onderliggend frame $\mathcal{F} = (W, R)$, getekend in het volgende plaatje.



(a) Ga na voor welke werelden x geldt:

- (i) $\mathcal{M}, x \models \Box\Box p \rightarrow \Diamond\neg q$
- (ii) $\mathcal{M}, x \models \Box q \rightarrow \Diamond p$

Motivering is niet vereist.

- (b) Geef als dat mogelijk is een labelingfunctie L' op het frame $\mathcal{F}$, zodanig dat voor het Kripke-model $\mathcal{M}' = (W, R, L')$ geldt: $\mathcal{M}' \not\models p \rightarrow \Box\Diamond p$. Als zo'n L' niet bestaat geef dan aan waarom niet.
- (c) Geef als dat mogelijk is een labelingfunctie L'' op het frame $\mathcal{F}$, zodanig dat voor het Kripke-model $\mathcal{M}'' = (W, R, L'')$ geldt: $\mathcal{M}'' \not\models \Box\Diamond p \rightarrow p$. Als zo'n L'' niet bestaat geef dan aan waarom niet.

Opgave 9. (4 + 4 punten)

We willen een programma P dat, indien mogelijk, als outputwaarde van de variabele x een getal oplevert dat tussen (de inputwaarden van) y en z ligt.

- (a) Specificeer dit gedrag met behulp van een Hoare triple.
[NB: Je hoeft het programmatje zelf niet te schrijven.]
- (b) Wat is het verschil tussen totale en partiële correctheid? Om welk type correctheid gaat het in onderdeel (a)?

Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.