

# Tentamen Logica en Modelleren

23 oktober 2009

## Opgave 1. (6 + 6 punten)

Leid met natuurlijke deductie af:

- (a)  $p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q \vdash \neg p$
- (b)  $p \rightarrow (q \vee r), \neg q \vdash p \rightarrow r$

## Opgave 2. (4 + 4 punten)

Beschouw de formule  $\exists x(Rxy \vee \neg \exists y Rxy)$

- (a) Teken de parse tree van deze formule.
- (b) Substitueer in de formule de (vrije voorkomens van) variabele  $y$  door de term  $f(x)$ .  
[NB: zorg daarbij indien nodig door herbenoeming van variabelen dat er geen “clash” optreedt.]

## Opgave 3. (5 + 5 punten)

Leidt met natuurlijke deductie af:

- (a)  $\forall x \forall y (Px \rightarrow \neg Qx) \vdash \neg \exists x (Px \wedge Qx)$
- (b)  $\forall x \neg Rxx \vdash \forall x \exists y \neg Rxy$

## Opgave 4. (5 + 5 punten)

De volgende semantische implicaties zijn ongeldig. Laat dit zien door het aangeven van een tegenmodel.

- (a)  $Pc, Pd, c \neq d \models \forall x Px$
- (b)  $\forall x \exists y Rxy, \forall x \forall y (Rxy \rightarrow \neg Ryx) \models \exists x \exists y \exists z (Rxy \wedge Ryz \wedge Rzx)$

**Opgave 5.** (4 + 4 + 4 punten)

Vertaal de onderstaande zinnen in de taal van de predikatenlogica. Gebruik daarbij de vertaalsleutel

Kxy: x is een kind van y

Gxy: x getrouwd met y

Tx: x is thuis

a: Anna                      b: Barbara                      c: Chris

- (a) Anna heeft kinderen, maar is niet getrouwd.
- (b) Geen van Anna's kinderen zijn thuis, behalve Chris.
- (c) Barbara en Chris zijn Anna's enige twee kinderen.

**Opgave 6.** (4 + 4 punten)

In een database van de post bevindt zich een tabel *Brieven* met kolommen *Id*, *Datum*, *Afzender*, *Geadresseerde*, waarin alle verzonden brieven worden geadministreerd. In het relatiemodel representeren we deze tabel door het predikaatsymbool  $B$ , zodat  $B(x, y, z, w)$  uitdrukt:

“ $x$  is de identifier van een brief die op dag  $y$  door  $z$  aan  $w$  is verstuurd”

Anna wordt aangeduid met de constante  $a$ .

Geef queries in de vorm van formules met een vrije variabele  $x$  naar:

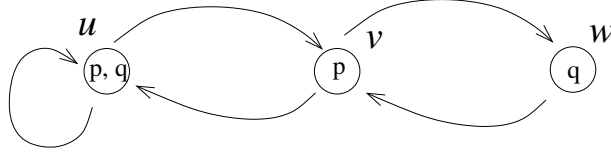
- (a) de dagen  $x$  waarop geen enkele brief is verstuurd.
- (b) de personen  $x$  die wel eens meerdere brieven op één dag aan Anna hebben gestuurd.

**Opgave 7.** (4 + 4 punten)

- (a) Geef, indien mogelijk, een formule in de predikatenlogica die uitdrukt dat een model hoogstens 3 elementen bevat. [Als het niet mogelijk is, licht dat dan kort toe.]
- (b) Geef, indien mogelijk, een formule in de predikatenlogica die uitdrukt dat een model hoogstens eindig veel elementen bevat. [Als het niet mogelijk is, licht dat dan kort toe.]

**Opgave 8.** (6 + 4 + 4 punten)

Gegeven is het Kripke model  $\mathcal{M} = (W, R, L)$  met als onderliggend frame  $\mathcal{F} = (W, R)$ , getekend in het volgende plaatje.



(a) Ga na voor welke werelden  $x$  geldt:

- (i)  $\mathcal{M}, x \models \Diamond(p \wedge q) \rightarrow (p \wedge q)$
- (ii)  $\mathcal{M}, x \models \Box q \rightarrow \Box(p \wedge q)$

Motivering is niet vereist.

- (b) Geef als dat mogelijk is een labelingfunctie  $L'$  op het frame  $\mathcal{F}$ , zodanig dat voor het Kripke-model  $\mathcal{M}' = (W, R, L')$  geldt:  $\mathcal{M}' \not\models \Box p \rightarrow \Diamond p$ . Als zo'n  $L'$  niet bestaat geef dan aan waarom niet.
- (c) Geef als dat mogelijk is een labelingfunctie  $L''$  op het frame  $\mathcal{F}$ , zodanig dat voor het Kripke-model  $\mathcal{M}'' = (W, R, L'')$  geldt:  $\mathcal{M}'' \not\models \Box q \rightarrow \Diamond p$ . Als zo'n  $L''$  niet bestaat geef dan aan waarom niet.

**Opgave 9.** (4 + 4 punten)

We willen een programma  $P$  dat de inputwaarde van variabele  $x$  toekent (als outputwaarden) aan  $y$  en  $z$  en vervolgens de outputwaarde van  $x$  gelijk aan 0 maakt.

- (a) Specificeer dit gedrag met behulp van een Hoare triple.  
[NB: Je hoeft het programmatje zelf niet te schrijven.]
- (b) Wat is het verschil tussen totale en partiële correctheid? Om welk type correctheid gaat het in onderdeel (a)?

*Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.*