

Voortentamen Logica en Modelleren

29 september 2009

Opgave 1. (7 + 7 punten)

Leid met natuurlijke deductie (ND) af:

- (a) $p \rightarrow \neg(q \vee r) \vdash q \rightarrow \neg p$
- (b) $p \vee (q \rightarrow r) \vdash (\neg p \wedge q) \rightarrow r$

Opgave 2. (3 + 3 + 3 punten)

Beschouw de formule $\forall x(\exists y Rxy \wedge (Rxy \rightarrow Pz))$

- (a) Teken de parse tree van deze formule.
- (b) Onderstreep in de formule de vrije variabelen.
- (c) Substitueer in de formule de variabele z door de term $f(x)$.
[NB: zorg daarbij indien nodig door herbenoeming van variabelen dat er geen “clash” optreedt.]

Opgave 3. (7 + 7 punten)

Leidt met natuurlijke deductie (ND) af:

- (a) $\forall x \forall y (Rxy \rightarrow \neg Ryx) \vdash \neg \exists x Rxx$
- (b) $\forall x Px, \neg \exists x (Px \wedge Qx) \vdash \forall x \neg Qx$

Opgave 4. (7 + 7 punten)

De volgende semantische implicaties zijn ongeldig. Laat dit zien door het aangeven van een tegenmodel.

- (a) $\exists x \exists y \exists z (x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z) \models \exists x Ax \wedge \exists x \neg Ax$
- (b) $\forall x \exists y Rxy \models \exists x \exists y (Rxy \wedge Ryx)$

Opgave 5. (3 + 8 punten)

- (a) Wanneer heet een verzameling formules $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ in de predikatenlogica consistent?
- (b) Geef voor elk van de volgende verzamelingen formules aan of ze consistent zijn. (Alleen het antwoord volstaat.)
- (i) $\{\forall x Px, \exists x(\neg Px \vee \neg Qx)\}$
 - (ii) $\{\forall x Px, \forall x Qx, \exists x(\neg Px \vee \neg Qx)\}$
 - (iii) $\{\forall x(Px \vee Qx), \exists x\neg Px, \exists x\neg Qx\}$
 - (iv) $\{\forall x(Skx \rightarrow \neg Sxx), \forall x(\neg Skx \rightarrow Sxx)\}$

Opgave 6. (7 + 7 + 7 punten)

Vertaal de onderstaande zinnen in de taal van de predikatenlogica. Gebruik daarbij de onderstaande vertaalsleutel.

Kxy: x is een kind van y

Gxy: x getrouwd met y

Tx: x is thuis

a: Anna b: Barbara c: Chris

- (a) Anna heeft getrouwde en ongetrouwde kinderen.
- (b) Alle kinderen van Anna zijn thuis, behalve Chris.
- (c) Barbara heeft precies één kind.

Opgave 7. (4 + 3 punten)

Gebruik in deze opgave, naast eventueel kwantoren, logische connectieven en het gelijkheidssymbool, alleen de predikaatletter P en de constanten c en d .

- (a) Geef een voorbeeld van een formule φ zodanig dat noch $Pc, \neg Pd \models \varphi$, noch $Pc, \neg Pd \models \neg\varphi$.
- (b) Bestaat er ook een formule ψ waarvoor geldt dat zowel $Pc, \neg Pd \models \psi$ als $Pc, \neg Pd \models \neg\psi$? Motiveer je antwoord.

Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.