

Dit tentamen bestaat uit 3 pagina's; er zijn 9 opgaven.

Per onderdeel is het aantal te behalen punten vermeld. Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.

Opgave 1. Leid met natuurlijke deductie (ND) af:

(a) $(p \wedge q) \rightarrow \neg r \vdash (p \wedge r) \rightarrow \neg q$ (5 punten)

(b) $\neg p, q \vee (r \rightarrow p) \vdash q \vee \neg r$ (5 punten)

Opgave 2.

(a) Geef het in het college behandelde criterium om te bepalen of een conjunctieve normaalvorm (CNV) een tautologie is. (2 punten)

(b) Bepaal een CNV voor de formule $(\neg p \rightarrow \neg p) \wedge (p \rightarrow (q \rightarrow \neg p))$.
Laat zien hoe je aan je antwoord komt. (4 punten)

(c) Bepaal met het criterium uit (a) of de formule uit (b) een tautologie is. (2 punten)

Opgave 3. Gegeven is de boolse functie $f(x, y, z)$ die 1 is als minstens één van de variabelen x, y, z de waarde 1 heeft, en die 0 is in alle andere gevallen. Verder is gegeven de boolse functie $g(v, w)$ die 1 is als hoogstens één van de variabelen v, w de waarde 1 heeft, en die 0 is in alle andere gevallen.

(a) Bepaal een gereduceerde OBDD van de functie f t.o.v. de variabelen ordening $[x, y, z]$; en een gereduceerde OBDD van de functie g t.o.v. de ordening $[v, w]$. (6 punten)

(b) Geef nu een gereduceerde OBDD van de boolse functie $f(x, y, z) \cdot \overline{g(v, w)}$, met variabelen ordening $[x, y, z, v, w]$.

Hint: gebruik onderdeel (a) (4 punten)

Opgave 4.

- (a) Wanneer heet een verzameling formules in de predikatenlogica consistent?
(3 punten)
- (b) Geef voor elk van de volgende verzamelingen formules aan of ze consistent zijn. (Alleen het antwoord volstaat.) (5 punten)
- (i) $\{\forall x Px, \exists x(\neg Px \vee \neg Qx)\}$
 - (ii) $\{\forall x Px, \forall x Qx, \exists x(\neg Px \vee \neg Qx)\}$
 - (iii) $\{\forall x(Px \vee Qx), \exists x\neg Px, \exists x\neg Qx\}$

Opgave 5. Leidt met natuurlijke deductie (ND) af:

- (a) $\exists x\forall y Rxy \vdash \exists x Rxx$ (5 punten)
- (b) $\forall x Px, \forall x\neg(Px \wedge Qx) \vdash \forall x\neg Qx$ (5 punten)

Opgave 6. De volgende gevolgtrekkingen zijn ongeldig. Laat dit zien door het aangeven van een tegenmodel.

- (a) $\exists x Ax, \exists x Bx \models \exists x \exists y (x \neq y)$ (5 punten)
- (b) $\exists x\forall y Rxy, \neg\forall x\forall y (Rxy \vee Ryx) \models \exists x\neg Rxx$ (5 punten)

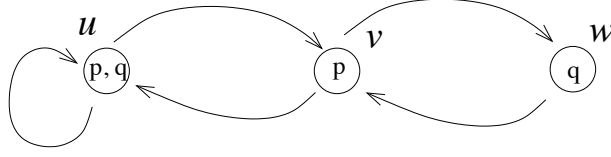
Opgave 7. Vertaal de onderstaande zinnen in de taal van de predikatenlogica. Gebruik de onderstaande vertaalsleutel.

Hx: x is thuis
 Wx: x werkt
 Bxy: x is een broer van y
 j: Janneke
 g: Gerard

- (a) Alle Janneke's broers zijn thuis, maar Janneke zelf werkt.
(4 punten)
- (b) Alle broers van Janneke zijn thuis, behalve Gerard.
(4 punten)
- (c) Als meerdere van haar broers thuis zijn, dan werkt Janneke niet.
(4 punten)

Opgave 8.

Gegeven is het Kripke model $\mathcal{M} = (W, R, L)$ met als onderliggend frame $\mathcal{F} = (W, R)$, getekend in het volgende plaatje.



- (a) Ga na voor welke werelden x geldt: $\mathcal{M}, x \models \Diamond q \rightarrow (p \wedge q)$ (3 punten)
- (b) Ga na voor welke werelden x geldt: $\mathcal{M}, x \models \Box\Box q \rightarrow \Box q$. (3 punten)
- (c) Bestaat er een labelingfunctie L' op het frame $\mathcal{F}$, zodanig dat voor het Kripke-model $\mathcal{M}' = (W, R, L')$ geldt: $\mathcal{M}' \not\models \Box p \rightarrow \Diamond p$? Motiveer je antwoord. (4 punten)
- (d) Bestaat er een labelingfunctie L'' op het frame $\mathcal{F}$, zodanig dat voor het Kripke-model $\mathcal{M}'' = (W, R, L'')$ geldt: $\mathcal{M}'' \not\models (p \wedge q) \rightarrow \Diamond(p \wedge q)$? Motiveer je antwoord. (4 punten)

Opgave 9.

- (a) Beschouw de volgende instantie van het Post Correspondence Problem (PCP). Geef een oplossing, als die er is, of beredeneer dat er geen oplossing is. (4 punten)

$$((1000, 0), (0, 00), (000, 0011), (11, 10))$$

- (b) Bestaat er een algoritme dat voor een willekeurige formule ϕ uit de predikatenlogica beslist of $\models \phi$? Licht je antwoord kort toe. (4 punten)