

Dit tentamen bestaat uit 3 pagina's; er zijn 8 opgaven.

Per onderdeel is het aantal te behalen punten vermeld. Het tentamen-cijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.

Opgave 1. Leidt met natuurlijke deductie (ND) af:

- (a) $(p \vee q) \rightarrow r \vdash (p \rightarrow r) \wedge (\neg r \rightarrow \neg q)$ (4 punten)
- (b) $p \rightarrow r, q \rightarrow r \vdash (p \vee q) \rightarrow r$ (4 punten)
- (c) $\neg p \rightarrow p \vdash p$ (2 punten)

Opgave 2.

- (a) Geef het op het college en in het boek gegeven criterium om te bepalen of een conjunctieve normaalvorm (CNV) een tautologie is. (2 punten)
- (b) Transformeer de formule $\neg p \rightarrow (\neg(p \rightarrow q) \rightarrow q)$ naar een CNV. Laatzien hoe je aan je antwoord komt. (6 punten)
- (c) Bepaal met het criterium uit (a) of de formule uit (b) een tautologie is. (2 punten)

Opgave 3.

- (a) Gegeven is de boolse functie $f(x, y, z)$ die 1 is als tenminste twee van de variabelen x , y en z de waarde 1 hebben, en die 0 is in alle andere gevallen. Geef een gereduceerde OBDD voor f met variabelen ordening $[x, z, y]$. Doe dit met behulp van de regels C1-3, uitgaande van een BDT voor f . (6 punten)
- (b) Verder is gegeven de boolse functie $g(y, w) = y \cdot \overline{w}$. Bepaal een OBDD van de functie $g(y, w)$ met variabelen ordening $[y, w]$. (4 punten)
- (c) Geef nu een gereduceerde OBDD van de boolse functie $h(x, y, z, w) = \overline{f(x, y, z)} \cdot g(y, w)$, met variabelen ordening $[x, z, y, w]$. Maak daarbij gebruik van (a) en (b). (4 punten)

Opgave 4. Leidt met natuurlijke deductie (ND) af:

(a) $\forall x(Qx \rightarrow Px), \exists xQx \vdash \exists xPx$ (5 punten)

(b) $\forall x \forall y (\neg Rxy \rightarrow Ryx) \vdash \forall x Rxx$ (5 punten)

Opgave 5. De volgende gevolgtrekkingen zijn ongeldig. Laat dit zien door het aangeven van een tegenmodel.

(a) $\exists y \forall x Rxy \models \forall x Rxx$ (5 punten)

(b) $\forall x \exists y (Rxy \wedge Ay), \exists x \exists y \exists z (x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z) \vdash$
 $\exists x \exists y (x \neq y \wedge Ax \wedge Ay)$ (5 punten)

Opgave 6. Vertaal de onderstaande zinnen in de taal van de predikatenlogica. Gebruik de onderstaande vertaalsleutel.

Bx: x is een boek

Lxy: x heeft y gelezen

a: Anna

c: Chris

(a) Alle boeken die Chris heeft gelezen heeft Anna ook gelezen. (5 punten)

(b) Er is precies één boek dat Anna en Chris allebei hebben gelezen. (5 punten)

Opgave 7. We gebruiken een tweeplaatsig predikaatsymbool K . Het model $\mathcal{N}$ heeft als domein de natuurlijke getallen $\mathbb{N}$, en $K^{\mathcal{N}}$ is de relatie $\leq$ (kleiner of gelijk) op $\mathbb{N}$.

(a) Wanneer heet een stel predikaatlogische formules φ, ψ consistent? (2 punten)

(b) Geef consistent stel formules φ, ψ , zodat $\mathcal{N} \models \varphi$, maar $\mathcal{N} \not\models \psi$. (4 punten)

(c) Geef een model $\mathcal{M}$ zodat voor de in (b) gevonden formules φ, ψ zowel $\mathcal{M} \models \varphi$ als $\mathcal{M} \models \psi$ gelden. (4 punten)

Opgave 8. Gegeven is het frame $\mathcal{F} = (W, R)$ met:

$$\begin{aligned} W &= \{a_1, a_2, a_3\} \\ R &= \{(a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_1, a_3), (a_3, a_3)\} \end{aligned}$$

Op $\mathcal{F}$ definiëren we het Kripke-model $\mathcal{M}$ met de labeling functie:

$$L(a_1) = \{p, q\}, \quad L(a_2) = \{p\}, \quad L(a_3) = \{q\}$$

Teken zelf het frame $\mathcal{F}$ en het Kripke-model $\mathcal{M}$.

- (a) Ga na voor welke werelden a_i geldt: $\mathcal{M}, a_i \models \Box(p \vee q)$. (4 punten)
- (b) Ga na voor welke werelden a_i geldt: $\mathcal{M}, a_i \models \Box(p \wedge q)$. (4 punten)
- (c) Geef indien mogelijk een labelingfunctie L' op het frame $\mathcal{F}$, zodanig dat voor het Kripke-model $\mathcal{M}' = (W, R, L')$ geldt:

$$\mathcal{M}' \models \Box(p \wedge q)$$

Indien dat niet mogelijk is, leg dan uit waarom niet. (4 punten)

- (d) Geef indien mogelijk een labelingfunctie L'' op het frame $\mathcal{F}$, zodanig dat voor het Kripke-model $\mathcal{M}'' = (W, R, L'')$ geldt:

$$\mathcal{M}'' \not\models \Box p \rightarrow \Diamond p$$

Indien dat niet mogelijk is, leg dan uit waarom niet. (4 punten)