

---

## Tweede Deeltentamen Lineaire Algebra 1

Faculteit der Exacte Wetenschappen, Vrije Universiteit

docent: R. Planqué

23 December 2016, 8:45 - 10:45.

---

Het gebruik van rekenmachines of boeken is niet toegestaan.  
Motiveer je antwoorden.

### Opgave 1

Laat

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}.$$

- a) Laat zien dat  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$  een eigenvector is van  $A$ .
- b) Bepaal de overige eigenwaarde(n) van  $A$  en geef een basis voor de bijbehorende eigenruimte(n).
- c) Leg uit waarom  $A$  diagonaliseerbaar is, en geef de diagonalisatie  $A = PDP^{-1}$ , waarbij  $P$  een inverteerbare matrix is, en  $D$  een diagonaalmatrix.
- d) Is  $A$  ook orthogonaal diagonaliseerbaar? Verklaar je antwoord.

### Opgave 2

Laat

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ -4 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \text{ en } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

- a) Bepaal een *orthonormale* basis van  $\text{Col } A$  met behulp van het Gram-Schmidt proces.
- b) Bepaal de  $QR$ -factorisatie van  $A$ .
- c) Volgens de orthogonale decompositiestelling is het mogelijk om  $\mathbf{b}$  te schrijven als  $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$  waarbij  $\mathbf{b}_1 \in \text{Col } A$  en  $\mathbf{b}_2 \in (\text{Col } A)^\perp$ . Bepaal  $\mathbf{b}_1$  en  $\mathbf{b}_2$ .

### Opgave 3

Het vlak  $V \subset \mathbb{R}^3$  wordt opgespannen door de vectoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Laat  $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ .

- a) Bepaal alle kleinste-kwadraten oplossing van het stelsel  $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{y}$ .
- b) Bepaal de afstand van  $\mathbf{y}$  naar het vlak  $V$ .

### Opgave 4

Bepaal of onderstaande beweringen juist of onjuist zijn. Indien de bewering juist is, geef dan een bewijs. Als de bewering onjuist is, geef dan een bewijs of een tegenvoorbeeld.

- a) Laat  $A$  een diagonaliseerbare matrix zijn. Als  $B$  gelijkvormig (similar) is aan  $A$ , dan is  $B$  ook diagonaliseerbaar.
- b) De kwadratische vorm  $Q(\mathbf{x}) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$  is positief definitief.
- c) Laat  $A$  een symmetrische matrix zijn, en  $\lambda$  een eigenwaarde met twee-dimensionale eigenruimte  $Eig_\lambda$ , opgespannen door eigenvectoren  $\mathbf{v}_1$  en  $\mathbf{v}_2$ . Dan geldt altijd dat  $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ .
- d) Laat  $U$  een  $n \times n$  matrix zijn met orthogonale kolommen. Dan geldt  $\|U\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$  voor alle  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .

### Opgave 5

Gegeven is de vectorruimte  $V = C([0, 1]; \mathbb{R})$ , en de functie  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , gegeven door

$$\langle \mathbf{u}(x), \mathbf{v}(x) \rangle = \int_0^1 \mathbf{u}(x)\mathbf{v}(x)dx.$$

Laat  $H = \text{span}\{1, 2x - 1, x^2 - x + \frac{1}{6}\}$ . Laat  $T : H \rightarrow H$  een lineaire transformatie zijn, gedefinieerd door

$$T(\mathbf{p}(x)) = x\mathbf{p}'(x),$$

waarbij  $\mathbf{p}'(x)$  de afgeleide van  $\mathbf{p}(x)$  is.

- a) Laat zien dat  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  een inproduct op  $V$  is.
- b) Laat zien dat  $\mathcal{B} = \{1, 2x - 1, x^2 - x + \frac{1}{6}\}$  een *orthogonale basis* vormt voor  $H$ .
- c) Bepaal  $[T]_{\mathcal{B}}$ , de matrixrepresentatie van  $T$  t.o.v. de basis  $\mathcal{B}$ .

### Normering

|           |         |         |         |         |
|-----------|---------|---------|---------|---------|
| 1: a) 2   | 2: a) 4 | 3: a) 3 | 4: a) 3 | 5: a) 4 |
| b) 3      | b) 3    | b) 2    | b) 3    | b) 3    |
| c) 2      | c) 3    |         | c) 3    | c) 3    |
| d) 1      |         |         | d) 3    |         |
| totaal: 8 | 10      | 5       | 12      | 10      |

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{5} + 1.$$