

Gebruik van rekenmachine, boek of aantekeningen is niet toegestaan

1. Laat

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Laat zien dat $\mathbf{v}$ een eigenvector van A is en bepaal de bijbehorende eigenwaarde.
- Laat zien dat 5 een eigenwaarde van A is en bepaal een basis voor de bijbehorende eigenruimte.
- Licht toe dat A diagonaliseerbaar is en geef een diagonaalmatrix D en een inverteerbare matrix P zodat $A = PDP^{-1}$.
- Geef aan of de oorsprong een aantrekker, afstoter of zadelpunt is van het discrete dynamische systeem $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$.

2. Laat

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Bepaal de rang van A .
- Bereken de afstand van $\mathbf{y}$ tot de lijn opgespannen door de eerste kolom van A .
- Bepaal met behulp van het Gram-Schmidtproces een orthogonale basis voor de kolomruimte van A .
- Bereken de orthogonale projectie van $\mathbf{y}$ op de kolomruimte van A .

3. Laat

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

- Bepaal een kleinste-kwadratenoplossing van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
- Bereken de kleinste-kwadratenfout behorende bij de kleinste-kwadratenoplossing uit a).
- Bepaal een singuliere-waardendecompositie van A .

4. Bepaal of onderstaande beweringen juist of onjuist zijn. Indien de bewering juist is, geef dan een bewijs. Als de bewering onjuist is, geef dan een tegenvoorbeeld.
- Als A een $m \times n$ matrix is, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ en $\hat{\mathbf{b}}$ de orthogonale projectie van $\mathbf{b}$ op $\text{Row}A$, dan is het stelsel $A^T \mathbf{x} = \hat{\mathbf{b}}$ consistent.
 - Als A en B gelijksoortige $n \times n$ matrices zijn en A is symmetrisch, dan is ook B symmetrisch.
 - Als A een $m \times n$ matrix is, dan is de kwadratische vorm $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A^T A \mathbf{x}$ positief definit.
 - Als V een inproductruimte is en $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ een orthonormale verzameling in V , dan geldt dat $\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\| = \sqrt{3}$.
5. a) Laat V een vectorruimte zijn met basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$. Laat $T : V \rightarrow V$ een lineaire transformatie zijn zodat $T(\mathbf{b}_1) = \lambda \mathbf{b}_1$ voor een zekere $\lambda \in \mathbb{R}$. Bepaal een eigenvector van de matrix $[T]_{\mathcal{B}}$ (de $\mathcal{B}$ -matrix voor T) en laat zien dat de bijbehorende eigenwaarde gelijk aan λ is.

Normering:

1 : a) 1	2 : a) 2	3 : a) 2	4 : a) 2	5 : a) 3
b) 3	b) 3	b) 2	b) 2	
c) 2	c) 3	c) 4	c) 2	
d) 1	d) 2		d) 2	
7	10	8	8	3

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{4} + 1$$