Uitwerking Lineaire Algebra Deeltentamen 2 18/12/2015

1a $A\underline{v} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{2}}{=} 4\underline{v}$

eigenwaarde 4 $\frac{1}{2}$

b $A - 5I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 1

Er zijn niet-triviale oplossingen dus 5 is eigenwaarde

$\begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 \text{ vrij} \\ x_3 \text{ vrij} \end{cases}$ $\frac{1}{2}$ $\quad \underline{x} = x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 1

Basis voor eigenruimte: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ $\frac{1}{2}$

c Er zijn 3 lineair onafhankelijke eigenvectoren, dus A is diagonaliseerbaar 1

$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 1

d Alle eigenwaarden zijn groter dan 1, dus de oorsprong is een afstoter. 1

2a $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 1

3 pivotkolommen, dus rang $A = 3$ 1

b $\hat{y} = \frac{y \cdot a_1}{a_1 \cdot a_1} a_1 = \frac{2}{4}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/2\\-1/2\\1/2\\-1/2\end{bmatrix}$ $1\frac{1}{2}$

$$\left\| \begin{bmatrix}3\\2\\1\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1/2\\-1/2\\1/2\\-1/2\end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix}5/2\\5/2\\1/2\\1/2\end{bmatrix} \right\| = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$= \sqrt{\frac{52}{4}} = \sqrt{13}$ $1\frac{1}{2}$

c $v_1 = a_1 = \begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}$ $\frac{1}{2}$

$v_2 = a_2 - \frac{a_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = \begin{bmatrix}-1\\1\\-3\\3\end{bmatrix} - \frac{-8}{4}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}$ 1

$v_3 = a_3 - \frac{a_3 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 - \frac{a_3 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2$

$= \begin{bmatrix}2\\0\\-4\\2\end{bmatrix} - \frac{-4}{4}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix} - \frac{8}{4}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}$ 1

Orthogonale basis $\{v_1, v_2, v_3\}$ $\frac{1}{2}$

d $\hat{y} = \frac{y \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 + \frac{y \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 + \frac{y \cdot v_3}{v_3 \cdot v_3} v_3$ 1

$= \frac{2}{4}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix} + 0 + \frac{4}{4}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3/2\\1/2\\-1/2\\-3/2\end{bmatrix}$ 1

3a oplossen $A^T A \underline{x} = A^T \underline{b}$ $\frac{1}{2}$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{2}$$

$$A^T \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -7 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{2}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & -7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Dus kleinste-kwadratenoplossing is $\hat{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ $\frac{1}{2}$

b
$$A\hat{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1\frac{1}{2} \\ 2 \\ 5\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \frac{1}{2}$$

$$\| A\hat{\underline{x}} - \underline{b} \| \overset{\frac{1}{2}}{=} \left\| \begin{bmatrix} -1\frac{1}{2} \\ 2 \\ 5\frac{1}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \right\|$$

$$= \sqrt{\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{3}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{6} \quad 1$$

c
$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{(zie a)}$$

Eigenwaarden van $A^T A$ zijn $\lambda_1 = 3$ en $\lambda_2 = 2$ $\frac{1}{2}$

Bijbehorende unit eigenvectoren $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ en $\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\frac{1}{2}$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{2} \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{2}$$

$$A\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{u}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad \frac{1}{2}$$

$$A\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \underline{u}_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} \underline{u}_1 \cdot \underline{x} = 0 \\ \underline{u}_2 \cdot \underline{x} = 0 \end{cases} \quad \text{ofwel} \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 \quad - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -2x_3 \\ x_3 \text{ vrij} \end{cases} \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{u}_3 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \; \frac{1}{2}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \; \frac{1}{2}$$

4a. juist $\frac{1}{2}$

Stel A $m \times n$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ en $\hat{\underline{b}} = \text{proj}_{\text{Row}A}\, \underline{b}$

Dan $\hat{\underline{b}} \in \text{Row}A$ dus $\hat{\underline{b}} \in \text{Col}(A^T)$

Dus $A^T \underline{x} = \hat{\underline{b}}$ is consistent. $1\frac{1}{2}$

b onjuist $\frac{1}{2}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Dan A en B gelijksoortig en A symmetrisch, maar B niet symmetrisch $1\frac{1}{2}$

c onjuist $\frac{1}{2}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dan $\underline{x} \neq \underline{0}$ maar $\underline{x}^T A^T A \underline{x} = \underline{0}$

Dus de kwadratische vorm is niet positief definiet.

$1\frac{1}{2}$

d. juist $\frac{1}{2}$

Stel V inproductruimte en $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ orthonormale verzameling in V. Dan

$$\|\underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3\| = \sqrt{\langle \underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3, \underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3 \rangle}$$

$$= \sqrt{\langle \underline{v}_1, \underline{v}_1 \rangle + \langle \underline{v}_2, \underline{v}_2 \rangle + \langle \underline{v}_3, \underline{v}_3 \rangle}$$ want $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ orthogonaal

$$= \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$ want $\|\underline{v}_i\| = 1$

$1\frac{1}{2}$

5a $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $1\frac{1}{2}$ is een eigenvector van $[T]_{\mathcal{B}}$ met eigenwaarde λ.

Immers:

$$[T]_{\mathcal{B}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [T]_{\mathcal{B}} [\underline{b}_1]_{\mathcal{B}} = [T(\underline{b}_1)]_{\mathcal{B}} = [\lambda \underline{b}_1]_{\mathcal{B}}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ $1\frac{1}{2}$