

1. a) Gauss-eliminatie leidt tot:

$$A \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -5 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U.$$

Er zijn drie pivots, dus de rang van A is 3.

Verder geldt: $\text{Row}(A) = \text{Row}(U)$, dus kies bijvoorbeeld als basis voor $\text{Row}(A)$ de niet-nul rijen van U :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

- b) Er geldt: $(\text{Row}(A))^\perp = \text{Nul}(A)$, dus we lossen op $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Uit 1a) volgt dat we x_4 vrij kunnen kiezen en dat daarna volgt: $x_3 = -x_4, x_2 = -6x_4$ en $x_1 = 4x_4$. Dus een basis voor $\text{Nul}(A) = (\text{Row}(A))^\perp$ is $\{(4, -6, -1, 1)\}$ en de dimensie is 1.

2. a) $B\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 3+i \\ -2 \end{pmatrix} = (1+i) \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \\ -1+i \end{pmatrix} = (1+i)\mathbf{v}$ en $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

Dus $\mathbf{v}$ is een eigenvector van B bij eigenwaarde $1+i$.

- b) Bereken $\det(B - \lambda I) = 0$:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 4 \\ 1 & -3 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ -3 & -3-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3-\lambda \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \\ = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = 0.$$

Dit levert $\lambda = 0$, $\lambda = 1+i$ of $\lambda = 1-i$. Via 2a) weten we dat een basis voor de eigenruimte bij $\lambda = 1+i$ is $\{(1, 2-i, -1+i)\}$. Volgens de theorie is de complex geconjugeerde van deze vector dan eigenvector bij $\lambda = 1-i$, dus een basis voor die eigenruimte is $\{(1, 2+i, -1-i)\}$. Tenslotte berekenen we nog een basis voor de eigenruimte bij $\lambda = 0$:

$$(B - 0 \cdot I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

dus een basis voor de eigenruimte bij $\lambda = 0$ is $\{(3, 7, -6)\}$.

3. a) We creëren een orthogonale basis $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ m.b.v. het Gram-Schmidt proces.
Kies $\mathbf{x}_1 = \mathbf{v}_1$. Verder:

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1} \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{9}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vervolgens:

$$\mathbf{x}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1} \mathbf{x}_1 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{x}_2}{\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_2} \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{18}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tenslotte moeten we er nog een orthonormale basis van maken door elke vector te delen door zijn lengte:

$$\left\{ \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

- b) We berekenen eerst $\hat{\mathbf{y}}$, de orthogonale projectie van $\mathbf{y}$ op V :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{y}} &= \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1} \mathbf{x}_1 + \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}_2}{\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_2} \mathbf{x}_2 + \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}_3}{\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{x}_3} \mathbf{x}_3 \\ &= 3 \cdot \mathbf{x}_1 - 2 \cdot \mathbf{x}_2 + 1 \cdot \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De afstand van $\mathbf{y}$ tot V is $\|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\| = \|(2, 1, 2, -3)\| = 3\sqrt{2}$.

4. De gegeven set datapunten leidt tot het stelsel vergelijkingen

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \mathbf{b}.$$

De kleinste-kwadraten oplossing is de oplossing van de vergelijking $A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$, dus:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -15 \end{pmatrix} \text{ met oplossing } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 6/5 \\ -3/2 \end{pmatrix}.$$

De beste fit is dus de lijn $y = \frac{6}{5} - \frac{3}{2}x$.

5. a) WAAR. Omdat A rang 4 heeft, is iedere kolom een pivotkolom en zijn de kolommen van A dus onafhankelijk. Dus geldt dat $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ slechts $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ als oplossing heeft. Stel nu dat er toch $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ bestaan waarvoor geldt dat $A\mathbf{x} = A\mathbf{y}$. Dan zou uit de laatste vergelijking volgen dat $A(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{0}$, dus dat $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0}$ en dus dat $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, wat in tegenspraak is met het uitgangspunt.
- b) WAAR. A is diagonaliseerbaar, dus er bestaan een diagonaalmatrix D en een inverteerbare matrix P zó dat $A = PDP^{-1}$. Verder is B gelijkvormig met A , dus er bestaat een inverteerbare matrix Q zó dat $B = QAQ^{-1}$. Gecombineerd levert dit: $B = QPDP^{-1}Q^{-1} = (QP)D(QP)^{-1}$, dus B is diagonaliseerbaar.
- c) WAAR. Merk eerst op dat Q een vierkante matrix is en dat

$$Q^T = (I_n - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T)^T = I_n^T - 2(\mathbf{u}\mathbf{u}^T)^T = I_n - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T = Q.$$

Gebruik verder dat $\mathbf{u}^T\mathbf{u} = 1$. Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned} Q^T Q &= (I_n - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T)(I_n - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T) = \\ &= I_n^2 - 4\mathbf{u}\mathbf{u}^T I_n + 4\mathbf{u}\mathbf{u}^T \mathbf{u}\mathbf{u}^T = I_n - 4\mathbf{u}\mathbf{u}^T + 4\mathbf{u}\mathbf{u}^T = I_n, \end{aligned}$$

dus Q is een orthogonale matrix.

- d) NIET WAAR. Kwadraatafsplitsen geeft:

$$Q(x, y, z) = 3\left(x + \frac{2}{3}y\right)^2 + \frac{2}{3}(y + 3z)^2 - 5z^2.$$

Dus er bestaan vectoren waarvoor Q negatief is, bijv. $Q(2, -3, 1) = -5$.

[N.B. Omdat

$$Q(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

kun je ook via de eigenwaarden van de matrix (die zijn $-1, 2$ en 5), concluderen dat Q niet positief definit is.]

6. a) Eenvoudig is na te gaan dat voor willekeurige polynomen $p, q, r \in \mathbb{P}_2$ en een willekeurige scalar $c \in \mathbb{R}$ is voldaan aan

$$\langle p, q \rangle = \langle q, p \rangle, \quad \langle cp, q \rangle = c \langle p, q \rangle$$

$$\text{en } \langle p + q, r \rangle = \langle p, r \rangle + \langle q, r \rangle.$$

Verder geldt

$$\langle p, p \rangle = p(-1)^2 + 2p(0)^2 + p(1)^2 \geq 0.$$

En uit $\langle p, p \rangle = 0$ volgt $p(-1) = p(0) = p(1) = 0$ en dus is p het nulpolynoom, want we hebben te maken met een tweedegraads polynoom met (minimaal) drie nulpunten.

- b) De onafhankelijkheid is duidelijk en drie onafhankelijke polynomen in $\mathbb{P}_2$ vormen een basis voor $\mathbb{P}_2$. Verder geldt: $\langle 1, t \rangle = -1 + 0 + 1 = 0$, $\langle 1, 2t^2 - 1 \rangle = 1 - 2 + 1 = 0$ en $\langle t, 2t^2 - 1 \rangle = -1 + 0 + 1 = 0$. Dus we hebben met een orthogonale basis te maken.

c) Er geldt

$$T(1) = (1+t) \cdot 0 = 0 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot t + 0 \cdot (2t^2 - 1),$$

$$T(t) = (1+t) \cdot 1 = 1+t = 1 \cdot 1 + 1 \cdot t + 0 \cdot (2t^2 - 1)$$

en

$$T(2t^2 - 1) = (1+t) \cdot 4t = 4t + 4t^2 = 2 \cdot 1 + 4 \cdot t + 2 \cdot (2t^2 - 1).$$

Dus:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$