

Faculteit der Exacte Wetenschappen	Tentamen Lineaire Algebra
Afdeling Wiskunde	voor BWI en Natuurkunde
Vrije Universiteit	07-02-2011, 18.30-21.15 uur

Gebruik van rekenmachine, boek of aantekeningen is niet toegestaan

1. De matrix A en de vector $\mathbf{b}$ worden gegeven door

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

- a) Aan welke relatie moeten b_1, b_2 en b_3 voldoen, opdat het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ consistent is (oplossingen heeft)?
b) Bepaal de rang van A en geef een basis voor de rijruimte van A .

Een lineaire afbeelding $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ wordt gedefinieerd door $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

- c) Is T injectief (one-to-one)? Is T surjectief (onto)?
[Verklaar je antwoorden.]

2. a) Toon aan:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = (x-1)^2(x+2).$$

- b) De matrix B wordt gegeven door:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

- (i) Bepaal de eigenwaarden van B en geef een basis voor de bijbehorende eigenruimten. [Aanwijzing: je kunt hierbij onderdeel a) gebruiken.]
(ii) Is B diagonaliseerbaar? [Verklaar je antwoord.]

3. $\mathbb{P}_2$ is de vectorruimte van alle polynomen van de graad kleiner dan of gelijk aan 2, inclusief het nulpolynoom.

- a) Laat zien dat het stelsel polynomen

$$\mathcal{B} = \{1 + 2x - x^2, 2 + 2x^2, 3 - 4x\}$$

lineair onafhankelijk is in $\mathbb{P}_2$.

- b) Licht toe dat $\mathcal{B}$ een basis is voor $\mathbb{P}_2$.
c) Bepaal $[x^2]_{\mathcal{B}}$, de coördinaatvector van x^2 t.o.v. de basis $\mathcal{B}$.

Z.O.Z.

4. Gegeven zijn de vectoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

en de lineaire deelruimte $V = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

- a) Bepaal, m.b.v. het Gram-Schmidt proces, een orthogonale basis voor V .
 - b) Bepaal $\hat{y}$, de orthogonale projectie van y op V .
 - c) Geef een basis voor $V^\perp$.
5. Bepaal of onderstaande beweringen juist of onjuist zijn. Indien de bewering juist is, geef dan een bewijs. Als de bewering onjuist is, geef dan een tegenvoorbeeld.
- a) Als de $n \times n$ matrix A inverteerbaar is, dan is de matrix A^2 ook inverteerbaar.
 - b) Laat A een reële $n \times n$ matrix zijn. Als A een niet-reële eigenwaarde heeft, dan heeft de matrix $A + I_n$ ook een niet-reële eigenwaarde.
 - c) Laat $\mathbf{u} = (x, y)$. De kwadratische vorm $Q(\mathbf{u}) = x^2 + xy + y^2$ is positief definit.

6. Bewijs onderstaande uitspraak:

V is de verzameling van alle vectoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ waarvoor $x_2 = x_3 = 0$.
Dan is V een deelruimte van $\mathbb{R}^4$.

Normering:

1 : a) 3	2 : a) 3	3 : a) 3	4 : a) 4	5 : 9	6 : 3
b) 2	b) 5	b) 1	b) 3		
c) 3		c) 3	c) 3		
8	8	7	10	9	3

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{5} + 1$$