

Vrije Universiteit, Faculteit Exacte Wetenschappen
Tweede deeltentamen Lineaire Algebra voor BWI en N
17 december 2009

Tentamencijfer = $1 + \frac{\text{totaal}}{10}$

Gebruik van rekenmachine of boek is niet toegestaan.

Vermeld op ieder blad dat je inlevert je naam en je studentnummer.

Geef niet alleen antwoorden maar ook de berekeningen.

Opgave 1. (15 punten)

De matrix A en de vector b zijn gegeven door

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

- a) Bepaal de kleinste-kwadraten-oplossing $\hat{x}$ van $Ax = b$.
- b) Heeft de vergelijking $Ax = b$ een oplossing?

Opgave 2. (15 punten)

De matrix A en de vector b zijn gegeven door

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

De eerste kolom van A noemen we a_1 , de tweede a_2 , de derde a_3 en de vierde a_4 .

- a) Leg kort uit waarom $\mathcal{B} = (a_1, a_2, a_4)$ een basis van $\text{Col } A$ is.
- b) Er is bekend dat $b \in \text{Col } A$. Bepaal de coördinatenvector $[b]_{\mathcal{B}}$ van b met betrekking tot de basis $\mathcal{B}$ uit a).
- c) Bepaal $\text{rank } A$ en de dimensie van $\text{Nul}(A^T)$.

Opgave 3. (15 punten)

Gegeven zijn de matrices

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Welke van deze matrices zijn diagonaliseerbaar en welke niet? Motiveer je antwoord kort.

Z.O.Z.

Opgave 4. (20 punten)

De matrix A en de vector u_1 zijn gegeven door

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 8 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Er is bekend dat deze matrix precies twee verschillende eigenwaarden λ_1 en λ_2 heeft.

- Laat zien dat u_1 een eigenvector van A is en bepaal de bijbehorende eigenwaarde λ_1 .
- Ga kort na dat u_1 een basis voor de eigenruimte van A bij de eigenwaarde λ_1 is.
- Bepaal een basis voor de eigenruimte van A bij de eigenwaarde λ_2 .
- Bepaal λ_2 .
- Bepaal een orthogonale basis van $\mathbb{R}^4$ die bestaat uit eigenvectoren van A .

Opgave 5. (15 punten)

De matrices P en D en de vector b zijn gegeven door

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Verder is $A = PDP^{-1}$.

- Bepaal het karakteristiek polynoom van A (een product van lineaire factoren is goed genoeg) zonder A uit te rekenen.
- Schrijf b als lineaire combinatie van eigenvectoren van A .
- Bepaal of $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k b$ bestaat. Zo ja, bepaal de limiet.

Opgave 6. (10 punten)

De kwadratische vorm $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door

$$Q(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2.$$

Bestaat er een vector $x \in \mathbb{R}^3$ met $Q(x) = -1$? Motiveer je antwoord kort.