



Tentamen lineaire algebra voor BWI
 maandag 15 december 2008, 15.15-18.00 uur.

ELK ANTWOORD DIENT TE WORDEN BEARGUMENTEERD.

Er mogen geen hulpmiddelen als rekenmachines, mobiele telefoons, laptops en dergelijke gebruikt worden.

Het aantal te behalen punten is per onderdeel in de kantlijn vermeld. Het tentamencijfer wordt bepaald door bij het aantal behaalde punten vijf op te tellen en vervolgens te delen door vijf.

1. Gegeven zijn de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 4 \\ 2 & 4 & 4\alpha \\ -2 & -4 & -2\alpha^2 \end{bmatrix}$ en de vector $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix}$ waarbij α en β reële getallen zijn.

- (3) (a) Voor welke waarden van α en β heeft het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ géén oplossingen?
 (2) (b) Los het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ op voor $\alpha = 0$ en $\beta = 0$.
 (2) (c) Is de bij het vorige onderdeel gevonden oplossingsverzameling een deelruimte van $\mathbb{R}^3$?
 (1) (d) Voor welke waarden van α spannen de kolommen van A heel $\mathbb{R}^3$ op?

2. Gegeven is de matrix A die we alvast een stukje geveegd hebben tot matrix F :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = F.$$

Verder is $W = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$, waarbij $\mathbf{v}_1$ de eerste kolom van A is, $\mathbf{v}_2$ de tweede, enzovoorts.

- (2) (a) Waar of niet waar: $W = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$. Vergeet niet uit te leggen waarom!
 (2) (b) Geef een basis voor W .
 (1) (c) Vormen de eerste, tweede en vierde kolom van F een basis voor W ?
 (2) (d) Is $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_5\}$ een basis voor W ?

3. Gegeven is de deelruimte W van $\mathbb{R}^4$ met basis

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

- (3½) (a) Bepaal die vector $\mathbf{w}$ in W waarvan de afstand tot de vector $\mathbf{b} = (5, 8, 0, 9)^T$ minimaal is en bereken deze afstand.
 (1½) (b) Geef een vector $\mathbf{v}$ ongelijk aan $\mathbf{b}$ en $\mathbf{w}$ waarvoor ook geldt dat $\mathbf{w}$ de vector uit W is waarvan de afstand tot $\mathbf{v}$ minimaal is.
 (2) (c) Bepaal een basis voor het orthogonale complement van W .

4. Gegeven zijn de volgende matrices en vector:

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Verder $A = PDP^{-1}$. Beantwoord de volgende vragen zonder P^{-1} en/of A uit te rekenen! Geef argumenten!

- (2) (a) Is $(1, 0, -1)^T$ een eigenvector van A ? En $(4, 1, -1)^T$? Leg uit!
- (1) (b) Bepaal $\det(A)$.
- (2) (c) Schrijf $A^k \mathbf{b}$ als lineaire combinatie van eigenvectoren van A (hierbij is k een geheel getal).
- (2) (d) Geef een basis voor $\text{Nul}(A + 2I)$.

5. Gegeven zijn de matrices

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- (5) (a) Welke van deze matrices zijn diagonaliseerbaar en welke niet? Dit kan met relatief weinig rekenwerk beantwoord worden.
- (2) (b) Welke van deze matrices zijn orthogonaal diagonaliseerbaar en welke niet?

(3) 6. Voor welke waarden van a en b is de matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & a \\ b & 2 \end{bmatrix}$ symmetrisch en positief definit?

7. Bewijs of weerleg:

- (2) (a) Als A een symmetrische $n \times n$ matrix is en $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, dan geldt $(A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (A\mathbf{y})$.
- (2) (b) De deelverzameling W van $\mathbb{P}_3$, die bestaat uit alle polynomen van graad 2, is een deelruimte van $\mathbb{P}_3$.
- (2) (c) Gegeven is dat voor een $m \times n$ matrix A en een stel vectoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$ in $\mathbb{R}^n$ geldt dat $\{A\mathbf{v}_1, \dots, A\mathbf{v}_p\}$ onafhankelijk is. Dan is $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ ook onafhankelijk.

Uitwerking Tentamen lineaire algebra voor BWI, , maandag 15 december 2008.

1. (a) Ga na dat

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 4\alpha & 0 \\ -2 & -4 & -2\alpha^2 & \beta \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 4 & 1 \\ 0 & 4-2\alpha & 4\alpha-8 & -2 \\ 0 & 0 & -2\alpha^2+4\alpha & \beta \end{array} \right]$$

Onderscheid nu de gevallen $\alpha = 2$, $\alpha = 0$ en de overige mogelijkheden. Invullen van $\alpha = 2$ levert de echelonvorm

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{array} \right]$$

en dus heeft het stelsel voor geen enkele β een oplossing. Invullen van $\alpha = 0$ levert de echelonvorm

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{array} \right]$$

en er zijn dus geen oplossingen als $\beta \neq 0$. Voor alle andere α is de eerst gevonden matrix een echelonvorm die in elke rij een pivot heeft, zodat het stelsel in die situatie altijd tenminste één oplossing heeft (hier zelfs precies één). *Conclusie:* geen oplossing als $\alpha = 2$ of als $\alpha = 0$ en $\beta \neq 0$.

- (b) Veeg de hierboven gevonden echelonvorm voor $\alpha = 0$ door tot gereduceerde echelonvorm, na invullen van $\beta = 0$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Dit leidt tot de vrije variabele x_3 en de twee vergelijkingen $x_1 = 1 - 4x_3$ en $x_2 = -1/2 + 2x_3$. De oplossing is dus

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- (c) Neen, want er geldt bijvoorbeeld dat de nulvector niet tot de oplossingsverzameling behoort (er geldt immers dat $A\mathbf{0} \neq (1, 0, 0)^T$).
- (d) De kolommen spannen $\mathbb{R}^3$ op als en slechts als $\text{Col}(A) = \mathbb{R}^3$ dus als en slechts als de dimensie van $\text{Col}(A)$ gelijk is aan 3. En dit geldt alleen als A (na vegen) drie pivots heeft. Volgens (a) is dat het geval als $\alpha \neq 0$ en $\alpha \neq 2$.
Een andere methode: vul A aan met de vector $(b_1, b_2, b_3)^T$, veeg tot echelonvorm en kies α zo dat dit stelsel een oplossing heeft voor alle keuzen van b_1 , b_2 en b_3 .

2. (a) Er geldt dat $\mathbf{v}_5 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_4$ (dit is bijvoorbeeld snel in te zien voor de kolommen van F en geldt dan ook voor de kolommen van A omdat A en F rij-equivalent zijn) en dus verandert W volgens de uitdunningsstelling niet als $\mathbf{v}_5$ uit de opspannende verzameling van W verwijderd wordt.
- (b) Omdat $W = \text{Col}(A)$ vormen de kolommen van A die na vegen een pivot kregen een basis voor W . Dit zijn $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ en $\mathbf{v}_4$.
- (c) Neen, vectoren uit het lineair omhulsel van deze kolommen hebben in de vierde positie altijd een nul staan. Dit geldt niet voor de vectoren uit W en dus kunnen deze kolommen W niet opspannen (en dat is wel een eis voor een basis).

- (d) In ieder geval is het aantal okay omdat uit (b) volgt dat W drie dimensionaal is. Ook is het duidelijk dat $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_3$ en $\mathbf{v}_5$ tot W behoren. Ze vormen dus een basis voor W als ze ook nog onafhankelijk zijn. Dit volgt snel uit F : vegen van het stelsel $x_1\mathbf{v}_1 + x_3\mathbf{v}_3 + x_5\mathbf{v}_5 = \mathbf{0}$ geeft als resultaat de corresponderende drie kolommen van F aangevuld met de nulvector. Dit stelsel heeft één oplossing en dus zijn de vectoren onafhankelijk.

3. (a) De gezochte $\mathbf{w}$ is precies de orthogonale projectie van $\mathbf{b}$ op W . Deze kan op twee manieren berekend worden: voor de eerste hebben we een orthogonale basis voor W nodig, die gevonden kan worden met de methode van Gram-Schmidt. Noem de eerste basisvector uit B $\mathbf{x}_1$, de tweede $\mathbf{x}_2$ en de derde $\mathbf{x}_3$. Maak vervolgens $\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_1$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{x}_2 - \frac{\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_2$ (dit had je ook meteen kunnen concluderen als je vantevoren had gezien dat $\mathbf{x}_1$ en $\mathbf{x}_2$ al loodrecht zijn), $\mathbf{v}_3 = \mathbf{x}_3 - \frac{\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2} \mathbf{v}_2 = \mathbf{x}_3 - \frac{20}{10} \mathbf{v}_1 - \frac{6}{2} \mathbf{v}_2 = (0, -2, 2, 0)^T$. De gezochte orthogonale projectie $\mathbf{w}$ van $\mathbf{b}$ op W is nu

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2} \mathbf{v}_2 + \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}_3}{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_3} \mathbf{v}_3 = \frac{30}{10} \mathbf{v}_1 + \frac{-4}{2} \mathbf{v}_2 + \frac{-16}{8} \mathbf{v}_3 = (1, 10, 2, 5)^T$$

De gevraagde afstand is de afstand van $\mathbf{b}$ tot $\mathbf{w}$, dus $\|\mathbf{b} - \mathbf{w}\| = \|(4, -2, -2, 4)^T\| = 2\sqrt{10}$. De tweede manier om de projectie te berekenen gaat met behulp van de kleinste kwadraten methode. Er geldt namelijk dat $W = \text{Col}(A)$ waarbij de kolommen van de matrix A precies de drie vectoren uit de basis B zijn. De projectie van $\mathbf{b}$ op W is nu $A\hat{\mathbf{x}}$ waarbij $\hat{\mathbf{x}}$ de kleinste kwadraten oplossing is van $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dus de oplossing van $A^T A\mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$.

- (b) Dat zijn bijvoorbeeld de vectoren op de lijn door $\mathbf{b}$ en $\mathbf{w}$ (maak maar een plaatje), omdat de orthogonale projectie van deze vectoren op W gelijk is aan $\mathbf{w}$. Dus alle vectoren $\mathbf{v}$ van de vorm $\mathbf{v} = \mathbf{w} + c(\mathbf{b} - \mathbf{w})$ voldoen ($c \in \mathbb{R}$).
- (c) De snelle methode gaat als volgt: $\dim W = 3$ en omdat in $\mathbb{R}^4$ gewerkt wordt is $\dim W^\perp$ dus 1. We hebben al een vector in $W^\perp$, namelijk de vector $\mathbf{b} - \mathbf{w} = (4, -2, -2, 4)^T$. Deze vormt dan meteen een basis voor $W^\perp$.

Een methode die iets meer werk vraagt is de volgende. Neem $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ in $W^\perp$. Dan moet $\mathbf{x}$ loodrecht op de drie basisvectoren van W staan. Dit betekent dat $x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$, $x_1 - x_4 = 0$ en $5x_1 + 2x_2 + 6x_3 - x_4 = 0$. Oplossen van het zo verkregen stelsels levert $W^\perp = \text{Span}\{(2, -1, -1, 2)^T\}$, waarmee meteen een basis gevonden is.

Een derde methode: $W = \text{Col } A$ met

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Volgens stelling 3 van hoofdstuk 6 volgt hieruit dat $W^\perp = \text{Nul}(A^T)$. Bepaal nu een basis voor $W^\perp$ door het stelsel $A^T \mathbf{x} = \mathbf{0}$ op te lossen. Dat is precies het stelsel van de hiervoor geschetste methode.

4. (a) Omdat PDP^{-1} een diagonalisering van A is, volgt dat A de eigenwaarden -2 en 1 heeft en dat

$$E_{-2} = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{en} \quad E_1 = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Hieruit volgt direct dat de gegeven vectoren geen eigenvectoren bij eigenwaarde 1 kunnen

zijn. Ga na dat

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{2}{5} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} - \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

en dus tot E_{-2} behoort. Blijkbaar is het een eigenvector bij eigenwaarde -2 . Ga vervolgens na dat $(4, 1, -1)$ niet tot E_{-2} behoort en dus geen eigenvector is.

- (b) $\det(A)$ is het product van de eigenwaarden, dus $-2 \cdot 1 \cdot (-2) = 4$. Een andere methode (via de rekenregels) is

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(PDP^{-1}) = \det(P) \cdot \det(D) \cdot \det(P^{-1}) \\ &= \det(P) \cdot \det(D) \cdot \frac{1}{\det(P)} = \det(D) = 4. \end{aligned}$$

- (c) Ga na dat

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Daaruit volgt dat

$$A^k \mathbf{b} = (-2)^k \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + 1^k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 3(-2)^k \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + (-2)^k \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- (d) Merk op dat $\text{Nul}(A + 2I)$ de eigenruimte bij eigenwaarde -2 is. In onderdeel (a) hebben we die al als lineair omhulsel van twee vectoren geschreven. Omdat die twee vectoren onafhankelijk zijn, vormen ze meteen een basis.

5. (a) A is een symmetrische matrix en dus diagonaliseerbaar (zelfs orthogonaal diagonaliseerbaar, zie stelling 2 van hoofdstuk 7). B en C zijn allebei bovendriehoeksmatrices. De eigenwaarden staan dus op de diagonaal (stelling 1 van hoofdstuk 5) en zijn in beide gevallen -1 (twee maal) en 2 (één maal). De meetkundige multipliciteit (dat is de dimensie van de eigenruimte) bij eigenwaarde 2 is dus 1 en die van eigenwaarde -1 is 1 of 2 (stelling 7a van hoofdstuk 5). Als de dimensie 2 is, dan is de matrix wel diagonaliseerbaar, anders niet (stelling 7b van hoofdstuk 5). Voor B geldt:

$$\dim E_{-1} = \dim \text{Nul}(B + I) = \dim \text{Nul} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 1$$

zodat B niet diagonaliseerbaar is. Voor C geldt:

$$\dim E_{-1} = \dim \text{Nul}(C + I) = \dim \text{Nul} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

zodat C wel diagonaliseerbaar is.

- (b) Volgens stelling 2 van hoofdstuk 7 zijn alleen de symmetrische matrices orthogonaal diagonaliseerbaar. Hier is dat alleen matrix A .

6. Een positief definitie matrix is per definitie symmetrisch. Blijkbaar moeten a en b gelijk zijn. Om positief definit te zijn, moeten de eigenwaarden allemaal positief zijn. We bepalen de eigenwaarden:

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & a \\ a & 2 - \lambda \end{bmatrix} = (2 - \lambda)^2 - a^2 = 0 \\ &\iff (2 - \lambda)^2 = a^2 \\ &\iff 2 - \lambda = \pm a \\ &\iff \lambda = 2 \pm a.\end{aligned}$$

De eigenwaarden zijn positief als zowel $2 - a > 0$, dus $a < 2$, als $2 + a > 0$, dus $a > -2$. *Conclusie:* de matrix is positief definit als $a = b$ en $-2 < a < 2$.

7. (a) Waar: schrijf het dotproduct maar als matrixproduct en gebruik de rekenregels voor transponeren:

$$(A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = (A\mathbf{x})^T \mathbf{y} = \mathbf{x}^T A^T \mathbf{y} = \mathbf{x}^T A \mathbf{y} = \mathbf{x}^T (A\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot (A\mathbf{y}).$$

- (b) Niet waar: de som van polynomen van graad 2 hoeft niet weer een polynoom van graad 2 te zijn, bijvoorbeeld $(x^2 - 2x + 3) + (-x^2 + x + 1) = -x + 4$. Het voldoet dus niet aan alle eisen voor een deelruimte.
- (c) Waar: stel maar dat $c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_p \mathbf{v}_p = \mathbf{0}$. Links en rechts vermenigvuldigen met A levert dan

$$A(c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_p \mathbf{v}_p) = A\mathbf{0}$$

en dus

$$c_1 A\mathbf{v}_1 + c_2 A\mathbf{v}_2 + \dots + c_p A\mathbf{v}_p = \mathbf{0}.$$

Omdat de vectoren $A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \dots, A\mathbf{v}_p$ onafhankelijk zijn kan dit laatste alleen maar als $c_1 = c_2 = \dots = c_p = 0$. Blijkbaar is $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ onafhankelijk.