



Voortentamen lineaire algebra voor BWI
 dinsdag 21 oktober 2008, 15.15-17.00 uur.

ELK ANTWOORD DIENT TE WORDEN BEARGUMENTEERD.

Er mogen geen hulpmiddelen als rekenmachines, mobiele telefoons, laptops en dergelijke gebruikt worden.

Het aantal te behalen punten is per onderdeel in de kantlijn vermeld. Het tentamencijfer wordt bepaald door bij het aantal behaalde punten vier op te tellen en vervolgens te delen door vier.

1. Gegeven zijn de volgende matrix en vector:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 2\alpha \\ 2 & 4 & \alpha^2 \\ -2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \beta \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

- (3) (a) Onderzoek voor welke α en β het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ geen oplossingen heeft.
- (2) (b) Los het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ op voor $\alpha = 2$ en $\beta = 5$.
- (1) (c) Voor welke waarden van α is A inverteerbaar?
- (2) (d) Bestaat er een LU-decompositie voor A als $\alpha = 2$? Zo nee, waarom niet? Zo ja, geef er één.

2. De lineaire afbeelding $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ roteert een vector eerst over $\frac{1}{4}\pi$ radialen tegen de wijzers van de klok in, en projecteert het resultaat daarna loodrecht op de lijn $y = -x$.

- (2) (a) Is T injectief (engels: "one-to-one")? En surjectief (engels: "onto")?
- (2) (b) Bepaal de standaardmatrix van deze lineaire afbeelding.

(2) 3. De 3×5 matrix B is als volgt uit de 3×5 matrix A gemaakt:

- De eerste rij van B is de eerste rij van A ;
- De tweede rij van B is de eerste plus de tweede plus de derde rij van A ;
- De derde rij van B is de derde rij van A min de eerste rij van A .

Bedenk, indien deze bestaat, een matrix C zo dat $CA = B$.

(2) 4. (a) Bepaal de determinant van de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 7 & 4 \\ 3 & 0 & -6 & 0 \end{bmatrix}.$$

(2) (b) Bepaal de determinant van de matrix $2A^T A^{-1}$.

5. Gegeven zijn de volgende matrix en vectoren:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 & 8 \\ 5 & 7 & 2 & 0 & 15 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- (2) (a) Behoort de vector $\mathbf{v}_3$ tot de kolomruimte van A ? En $(0, 0, 0, 0, 0)^T$?
 - (2) (b) Is de kolomruimte van A heel $\mathbb{R}^4$?
 - (2) (c) Bepaal een basis voor de kolomruimte van A .
 - (2) (d) Geef een zo klein mogelijke matrix B zo dat $\text{Col } A = \text{Col } B$.
 - (2) (e) Waar of niet waar: $\text{Col } A = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.
 - (2) (f) Waar of niet waar: $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ is een basis voor $\text{Col } A$.
6. Geef van elk van de volgende uitspraken aan of deze waar of onwaar is. Leg ook uit waarom! In het geval dat een uitspraak niet waar is, betekent dit meestal dat een voorbeeld gegeven moet worden waaruit dat blijkt. Als het waar is moet een bewijs gegeven worden.
- (2) (a) Van de vectoren $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ en $\mathbf{v}_3$ in $\mathbb{R}^n$ is gegeven dat $\mathbf{v}_3$ geen element is van $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Dan geldt dat $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ onafhankelijk is.
 - (2) (b) Elk stelsel met even veel vergelijkingen als onbekenden kan met de regel van Cramer opgelost worden.
 - (2) (c) In de vectorruimte van reëelwaardige functies met domein $\mathbb{R}$ geldt dat $\{1, \cos^2 x, \sin 2x\}$ een basis is voor $\text{Span}\{1, \cos^2 x, \sin^2 x, \cos 2x, \sin 2x\}$.
 [AANWIJZING: indien nodig kunnen de volgende gonioformules je misschien van dienst zijn: $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ en $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$]