

Faculteit der Exacte Wetenschappen	Tentamen Lineaire Algebra 2
	12.00 - 14.00 uur
Vrije Universiteit	26-06-2015

Gebruik van rekenmachine, dictaat of aantekeningen is niet toegestaan

1. Beschouw de vectorruimte $V = \mathbb{C}^3$. Voor twee vectoren $v = (v_1, v_2, v_3)$ en $w = (w_1, w_2, w_3)$ van V definiëren we het product

$$\langle v, w \rangle = v_1 \overline{w_1} + 2iv_1 \overline{w_2} - 2iv_2 \overline{w_1} + v_2 \overline{w_2} + 2v_3 \overline{w_3}.$$

- Toon aan dat $\langle \cdot, \cdot \rangle$ een Hermitisch product op V definieert.
 - Ga na of $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ook een inwendig product op V definieert.
2. We beschouwen $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$, de vectorruimte van polynomen van graad ten hoogste 2 in de (reële) variabele t en met complexe coëfficiënten, met het standaard inproduct

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t) \overline{q(t)} dt, \text{ voor } p, q \in \mathbb{P}_2(\mathbb{C}).$$

We bekijken de deelruimte V opgespannen door de verzameling

$$\mathcal{B} = \{4t - 3, t^2\}.$$

- Toon aan dat $\mathcal{B}$ een orthogonale basis is voor V t.o.v. het gegeven inproduct.
- Bereken $\|4t - 3\|$ en $\|t^2\|$.
- Bepaal de projectie van $p(t) = 1$ op V t.o.v. het gegeven inproduct.

We vullen $\mathcal{B}$ aan met 1, zodat er een basis $\mathcal{C} = \{1, 4t - 3, t^2\}$ voor $\mathbb{P}_2$ ontstaat. We definiëren vervolgens de lineaire afbeelding $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$ door $T(p) = (t - 1)p'(t)$, dus eerst de afgeleide nemen en daarna vermenigvuldigen met $t - 1$.

- Bepaal $[T]_{\mathcal{C}}$, de matrix van T t.o.v. de basis $\mathcal{C}$.

3. Laat $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ een eenheidsvector zijn (d.w.z. $\|\mathbf{u}\| = 1$) en laat $\langle \cdot, \cdot \rangle$ het standaard inproduct zijn op $\mathbb{C}^n$. De operator $P : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ wordt gedefinieerd door

$$P(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \mathbf{u}.$$

- Toon aan dat P lineair is.
- Toon aan dat P Hermitisch (zelfgeadjungeerd) is.
- Toon aan dat P een orthogonale projectie is.
- Geef een basis voor $\text{Ker}(P)$.

Z.O.Z.

4. Laat V een unitaire ruimte zijn en laat $T : V \rightarrow V$ een lineaire afbeelding zijn waarvoor geldt $T^* = -T$ (de afbeelding T heet dan anti-Hermitisch).

- a) Toon aan dat iedere eigenwaarde van T zuiver imaginair is (d.w.z. het reële deel is nul).
- b) Toon aan dat voor iedere vector $v \in V$ geldt dat $\|T\mathbf{v}\| = \|T^*\mathbf{v}\|$.
- c) Laat $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ twee niet-nulvectoren zijn. Stel verder dat $T\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ en $T\mathbf{w} = \mu\mathbf{w}$, voor $\lambda \neq \mu$. Toon aan dat $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$.

5. Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

De eigenwaarden van A zijn $\lambda_1 = 0$ (met algebraïsche multipliciteit 1) en $\lambda_2 = 1$ (met algebraïsche multipliciteit 2)

- a) Bepaal een basis voor de eigenruimte bij λ_1 en een basis voor de gegeneraliseerde eigenruimte bij λ_2 .
- b) **Bonusopgave:** Bepaal een diagonaliseerbare matrix S en een nilpotente matrix N zó dat $A = S + N$ en $NS = SN$.

Normering:

1 : a) 2	2 : a) 2	3 : a) 2	4 : a) 3	5 : a) 3
b) 3	b) 2	b) 3	b) 2	b) 3
	c) 3	c) 3	c) 3	
	d) 3	d) 2		
_____	_____	_____	_____	_____
5	10	10	8	6

$$\text{Eindcijfer} = \min \left\{ 10, \frac{\# \text{ punten}}{4} + 1 \right\}$$