

Faculteit der Exacte Wetenschappen	Tentamen Lineaire Algebra 2
	Duur: 2 uur
Vrije Universiteit	01-07-2013

Gebruik van rekenmachine, dictaat of aantekeningen is niet toegestaan

1. Beschouw de vectorruimte $V = \mathbb{C}^3$. Voor twee vectoren $v, w \in V$ definiëren we het product

$$\langle v, w \rangle := 2v_1\bar{w}_1 + v_1\bar{w}_2 + v_1\bar{w}_3 + v_2\bar{w}_1 + v_2\bar{w}_2 + v_3\bar{w}_1 + v_3\bar{w}_3.$$

- a) Toon aan dat $\langle \cdot, \cdot \rangle$ een Hermitisch product op V definieert.
b) Ga na of $\langle \cdot, \cdot \rangle$ een inwendig product op V definieert.
2. Bekijk $V = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, de vectorruimte van polynomen van graad ten hoogste 2 in de (reële) variabele t en met reële coëfficiënten, met het standaard inwendig product op het interval $[0, 1]$:

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt,$$

voor $p, q \in V$. Bekijk tevens de verzameling polynomen

$$\mathcal{B} = \left\{ 1, 2\sqrt{3} \left(t - \frac{1}{2} \right) \right\}.$$

Zij H de deelruimte van V die door de vectoren uit $\mathcal{B}$ wordt opgespannen.

- a) Laat zien dat $\mathcal{B}$ een orthonormale basis is voor H t.o.v. het gegeven inwendige product.
b) Bepaal de orthogonale projectie van $p(t) = t^2 - 1$ op H .

Vul $\mathcal{B}$ nu aan tot het stelsel $\mathcal{C} = \{1, 2\sqrt{3}(t - \frac{1}{2}), t^2\}$, welke een basis vormt voor V . Zij $p \in V$ en definieer de operator $T : V \rightarrow V$ door $T(p(t)) = (p'(t))^2$.

- c) Bepaal de matrix $[T]_{\mathcal{C}}$, de matrix van T t.o.v. de basis $\mathcal{C}$.
3. Laat V een eindig-dimensionale vectorruimte zijn. Zij $T : V \rightarrow V$ een lineaire afbeelding.
- a) Bewijs: T injectief $\iff T$ surjectief.

Neem aan dat W_1 en W_2 twee lineaire deelruimtes van de vectorruimte V zijn zodanig dat $V = W_1 + W_2$.

- b) Bewijs of weerleg: $V = W_1 \oplus W_2 \iff \dim V = \dim W_1 + \dim W_2$.

Z.O.Z.

4. Zij V een unitaire ruimte met $\dim V \geq 1$. Laat $T : V \rightarrow V$ een zelfgeadjungeerde operator zijn. Verder zijn $v, w \in V$ eigenvectoren van T die bij verschillende eigenwaarden horen.

a) Bewijs dat v en w loodrecht op elkaar staan.

Zij M een zelfgeadjungeerde complexe $(n \times n)$ -matrix.

- b) Bewijs (m.b.v. de spectraalstelling) dat er een unitaire matrix U en een diagonaalmatrix D bestaan zodat $M = UDU^*$.

Zij A de volgende matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & i \\ -i & 3 \end{pmatrix}.$$

- c) Bepaal een matrix B zodat $B^2 = A$.

5. Laat A een willekeurige complexe $(n \times n)$ -matrix zijn. We kunnen A schrijven als de som van twee Hermitische matrices: $A = A_1 + iA_2$, waarbij A_1 en A_2 dus Hermitisch zijn.

Een matrix A heet normaal als $AA^* = A^*A$.

- a) Bewijs: A is normaal $\iff A_1A_2 = A_2A_1$.
b) Geef een voorbeeld van een normale (2×2) -matrix die niet Hermitisch en niet unitair is.
c) Laat zien dat als A normaal is dat dan voor alle $x \in \mathbb{C}^n$ geldt dat $\|Ax\| = \|A^*x\|$. Hierbij is de norm $\|\cdot\|$ afkomstig van het standaard inwendig product op $\mathbb{C}^n$.

6. Laat B de matrix zijn gegeven door:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- a) Bepaal een nilpotente matrix N en een diagonaliseerbare matrix S zodanig dat $B = N + S$, waarbij $NS = SN$.
b) **Bonusopgave:**
Bereken e^{tB} .

Normering:

1 : a) 3	2 : a) 2	3 : a) 3	4 : a) 3	5 : a) 3	6 : a) 5
b) 2	b) 2	b) 2	b) 2	b) 2	b) 3
	c) 2		c) 3	c) 2	
—	—	—	—	—	—
5	6	5	8	7	8

$$\text{Eindcijfer} = \min \left\{ 10, \frac{\# \text{ punten}}{4} + 1 \right\}$$