

Gebruik van rekenmachine, dictaat of aantekeningen is niet toegestaan

1. We beschouwen $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$, de vectorruimte van polynomen van de graad ten hoogste 2 in de (reële) variabele t en met complexe coëfficiënten. Voor twee polynomen $p, q \in \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ definiëren we

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 t p(t) \overline{q(t)} dt.$$

- a) Toon aan dat $\langle \cdot, \cdot \rangle$ een inproduct op V definieert.

Beschouw de deelruimte $V \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ gegeven door $V = \text{Span} \{ \sqrt{2}, 6t - 4 \}$.

- b) Toon aan dat $\mathcal{B} = \{ \sqrt{2}, 6t - 4 \}$ een orthonormale basis is voor V .
c) Bereken de orthogonale projectie van t^2 op V .

2. Zij $V = \mathbb{C}^3$ met het standaard inproduct en zij de basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Van de operator T weten we dat de matrix ten opzichte van de basis $\mathcal{B}$ gegeven wordt door

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Is de operator T Hermitisch? [Verklaar je antwoord!]

3. In $\mathbb{R}^4$ zijn gegeven de vectoren

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

U is de deelruimte opgespannen door $\mathbf{u}$. W is de deelruimte bestaande uit vectoren die loodrecht staan op $\mathbf{v}$.

- a) Bepaal een basis voor W .
b) Toon aan: $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

Z.O.Z.

4. Zij $V = \mathbb{C}^2$ met het standaardinproduct en zij $\mathbf{u} \in V$ met $\|\mathbf{u}\| = 1$. Definieer de matrix P door $P = \mathbf{u}\mathbf{u}^*$.

- Toon aan: P is een orthogonale projectie.
- Bepaal een basis voor $\text{Im}\{P\}$. [Verklaar je antwoord!]

5. Zij V een unitaire ruimte en zij $T : V \rightarrow V$ een lineaire afbeelding waarvoor geldt $T^* = -T$. Toon aan dat iedere eigenwaarde van T zuiver imaginair is (d.w.z. het reële deel is nul).

6. Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

- Bereken de eigenwaarden van A .
- Bepaal een basis voor de eigenruimte van de enkele eigenwaarde en een basis voor de gegeneraliseerde eigenruimte van de dubbele eigenwaarde.
- Bepaal een diagonaliseerbare matrix S en een nilpotente matrix N zó dat $A = S + N$ en $NS = SN$.

Normering:

1 : a) 3	2 : 6	3 : a) 3	4 : a) 3	5 : 6	6 : a) 3
b) 4		b) 3	b) 3		b) 4
c) 3					c) 4
10	6	6	6	6	11

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{5} + 1$$