

1(a) Voor $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$ geldt $\langle e_1, y \rangle_A = 0$ voor alle $y \in \mathbb{C}^2$. Dus $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ is gedegeneerd.

(b) Stel $\langle x, y \rangle_B = 0$ voor alle $y \in \mathbb{C}^2$. Dan $\langle x, e_1 \rangle_B = 4x_1 + 2x_2 = 0$ en $\langle x, e_2 \rangle_B = 2x_1 - x_2 = 0$ (Hier $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ en $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$). Maar uit $4x_1 + 2x_2 = 0$ en $2x_1 - x_2 = 0$ volgt $x_1 = x_2 = 0$. Dus $x = 0$. Dus $\langle x, y \rangle_B$ is niet-gedegeneerd.

(c) Omdat $\langle x, y \rangle_A$ en $\langle x, y \rangle_B$ Hermitesche producten zijn volgt dat $\langle x+x', y \rangle_A = \langle x, y \rangle_A + \langle x', y \rangle_A$ en $\langle x+x', y \rangle_B = \langle x, y \rangle_B + \langle x', y \rangle_B$. Optellen levert $\langle x+x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$.

Verder $\langle \lambda x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle_A + \langle \lambda x, y \rangle_B = \lambda \langle x, y \rangle_A + \lambda \langle x, y \rangle_B = \lambda \langle x, y \rangle$,

$\langle y, x \rangle = \langle y, x \rangle_A + \langle y, x \rangle_B = \overline{\langle x, y \rangle_A} + \overline{\langle x, y \rangle_B} = \overline{\langle x, y \rangle}$.

Dus $\langle x, y \rangle$ is Hermitisch product.

Merkt op dat $\langle x, x \rangle = 4x_1\bar{x}_1 + 2x_1\bar{x}_2 + 2x_2\bar{x}_1 + 2x_2\bar{x}_2$. Dus $\langle x, x \rangle = (2x_1 + x_2)(\overline{2x_1 + x_2}) + x_2\bar{x}_2 = |2x_1 + x_2|^2 + |x_2|^2 \geq 0$, en $= 0$ alleen als $x_2 = 0$ en $2x_1 + x_2 = 0$, derhalve als $x = 0$.

2(a) Als $k \neq j$ dan $\langle u_k, u_j \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikt} \overline{e^{jkt}} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-j)t} dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{i(k-j)} e^{i(k-j)t} \Big|_0^{2\pi} = 0$.

Als $k = j$ dan $\langle u_k, u_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikt} \overline{e^{ikt}} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 dt = 1$.

Het stelsel is dus orthonormaal, dus onafhankelijk en spannt ook W op omdat

$$\sum_{k=-2}^2 \alpha_k e^{ikt} = \sum_{k=-2}^2 \alpha_k u_{k+3}$$

(b) Bedenk dat $f_k = \langle f, u_{k+3} \rangle$. Dus $Tf(t) = \sum_{k=-2}^2 \langle f, u_{k+3} \rangle u_{k+3} = \sum_{k=1}^5 \langle f, u_k \rangle u_k$. Omdat $\langle u_k, u_k \rangle = 1$, volgt nu (uit Stelling II.4.7) dat Tf de orthogonale projectie van V op W is.

(c) Uit gevolg I.3.13 volgt nu dat $\|Tf\|^2 = \sum_{k=1}^5 |\langle f, u_k \rangle|^2 = \sum_{k=1}^5 |f_{k-3}|^2$ en daar $\|Tf\| \leq \|f\|$ volgt gekilde.

3(a) $\|Tv\|^2 = \langle Tv, Tv \rangle = \langle v, v \rangle = \|v\|^2$. Daar $\|Tv\| \geq 0$ en $\|v\| \geq 0$ volgt hieruit $\|Tv\| = \|v\|$.

3 (b) Bedenk eerst $Tv=0 \Rightarrow \|Tv\|=0 \Rightarrow \|v\|=0 \Rightarrow v=0$. Dus $\ker T = \{0\}$.

Dan $\dim \ker T = 0$. Dus $\dim V = \dim \operatorname{Im} T + \dim \ker T = \dim \operatorname{Im} T \leq \dim W$.

(c) Voor iedere v' geldt $\langle T^*Tv, v' \rangle = \langle Tv, T^*v' \rangle = \langle v, v' \rangle$. Dus voor alle $v' \in V$ hebben we $\langle T^*Tv - v, v' \rangle = 0$. Dan moet $T^*Tv - v = 0$. Dus $T^*Tv = v$.

(d) Eerst projectie. Merk op dat $T^*T = \operatorname{id}_V$. Dus $(TT^*)(TT^*) = T(T^*T)T^* = T \operatorname{id}_V T^* = TT^*$.

Dan orthogonaal: $(TT^*)^* = (T^*)^*T^* = TT^*$.

4 (a) We hebben $Tu_k = \lambda_k u_k$. Dus $Tv = T(\sum_{k=1}^n \alpha_k u_k) = \sum_{k=1}^n \alpha_k T(u_k) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \alpha_k u_k$.

Dan $\langle Tv, w \rangle = \langle \sum_{k=1}^n \lambda_k \alpha_k u_k, \sum_{l=1}^n \beta_l u_l \rangle = \sum_{k=1}^n (\sum_{l=1}^n \lambda_k \alpha_k \bar{\beta}_l \langle u_k, u_l \rangle)$.

Daar $\langle u_k, u_l \rangle = 0$ als $k \neq l$, volgt $\langle Tv, w \rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k \alpha_k \bar{\beta}_k \langle u_k, u_k \rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k \alpha_k \bar{\beta}_k$.

(b) Zij $w = \sum_{k=1}^n \beta_k u_k$. Dan $\langle Tv, w \rangle = \langle v, T^*w \rangle$, voor iedere v .

Dus $\sum_{k=1}^n \lambda_k \alpha_k \bar{\beta}_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k \overline{\lambda_k \beta_k} \stackrel{*}{=} \langle v, \sum_{k=1}^n \overline{\lambda_k} \beta_k u_k \rangle$, voor iedere $v \in V$.

Dus $T^*w = \sum_{k=1}^n \overline{\lambda_k} \beta_k u_k$. $\quad * \rangle \overline{\lambda_k \beta_k} = \overline{\lambda_k} \bar{\beta}_k$.

5 (a) $A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$. (Je kunt de matrix P simpelweg $P=I$ kiezen!)
Daar $N = A - 2I$ zo is dat $N^3 = 0$ is N nilpotent.

Dus $A = 2I + N = S + N$ met $S = 2I$. Duidelijk S diagonaliseerbaar,

N nilpotent (narekenen), $NS = SN$ omdat iedere matrix met $2I$ commuteert.

(b) $e^{tS} = e^{2t} I$, $e^{tN} = I + tN + \frac{t^2}{2} N^2$. Alleen $N^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ is nog nodig

$$I + tN + \frac{t^2}{2} N^2 = \begin{bmatrix} 1+t+\frac{t^2}{2} & t+\frac{t^2}{2} & \frac{t^2}{2} \\ -\frac{t^2}{2} & 1-t-\frac{t^2}{2} & t-\frac{t^2}{2} \\ -t & -t & 1-t \end{bmatrix}$$

$$\text{Dus } e^{tA} = \begin{bmatrix} (1+t+\frac{t^2}{2})e^{2t} & (t+\frac{t^2}{2})e^{2t} & \frac{t^2}{2}e^{2t} \\ \frac{t^2}{2}e^{2t} & (1-t-\frac{t^2}{2})e^{2t} & (t-\frac{t^2}{2})e^{2t} \\ -te^{2t} & -te^{2t} & (1-t)e^{2t} \end{bmatrix}$$