

Normering:

$$\begin{array}{l} 1a : 1 \quad ; \quad 2a : 2 \quad ; \quad 3a : 1 \quad ; \quad 4a : 3 \quad ; \quad 5a : 6 \quad ; \\ b : 1 \quad ; \quad b : 3 \quad ; \quad b : 3 \quad ; \quad b : 3 \quad ; \quad b : 4 \quad ; \\ c : 3 \quad ; \quad c : 2 \quad ; \quad c : 2 \quad ; \\ d : 2 \quad . \end{array}$$

$$\text{Eindcijfer} = 1 + \frac{\text{totaal}}{4}.$$

1. Op de vectorruimte $\mathbb{C}^2$ definiëren we de Hermitische producten

$$\langle x, y \rangle_A = 3x_2\bar{y}_2$$

en

$$\langle x, y \rangle_B = 4x_1\bar{y}_1 + 2x_1\bar{y}_2 + 2x_2\bar{y}_1 - x_2\bar{y}_2.$$

- (a) Toon aan dat $\langle x, y \rangle_A$ gedegenereerd is.
- (b) Toon aan dat $\langle x, y \rangle_B$ niet-gedegenereerd is.
- (c) Zij $\langle x, y \rangle = \langle x, y \rangle_A + \langle x, y \rangle_B$. Toon aan dat $\langle x, y \rangle$ een Hermitisch product is en zelfs een inwendig product is.

2. Zij W de vectorruimte bestaande uit alle complexwaardige functies $f(t)$ op $[0, 2\pi]$ die de vorm

$$f(t) = \sum_{k=-2}^2 \alpha_k e^{ikt}$$

hebben, waarbij $\alpha_{-2}, \dots, \alpha_2$ complexe getallen zijn. Zij V een n -dimensionale ($n \geq 6$) vectorruimte die bestaat uit continue complexwaardige functies op $[0, 2\pi]$, en die W als deelruimte bevat. Op V is het inwendig product gedefinieerd door

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Voor $f \in V$ definiëren voor $k = -2, \dots, 2$ de getallen $\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt$.

- (a) Toon aan dat $\mathcal{U} = \{u_1(t), u_2(t), \dots, u_5(t)\}$, waarbij $u_k(t) = e^{i(k-3)t}$, een orthonormale basis is voor W .
- (b) De afbeelding $T : V \rightarrow V$ wordt gegeven door

$$Tf(t) = \sum_{k=-2}^2 \hat{f}_k e^{ikt}.$$

Toon aan dat T een orthogonale projectie is van V , een bepaal de beeldruimte $\text{Im } T$ van T .

- (c) Waarom geldt voor iedere $f \in V$ dat $\sum_{k=-2}^2 |\hat{f}_k|^2 \leq \|f\|^2$?

Z.O.Z.

3. V en W zijn unitaire ruimtes. Zij $T : V \rightarrow W$ een lineaire afbeelding zo dat voor ieder tweetal $v, v' \in V$ geldt $\langle Tv, Tv' \rangle = \langle v, v' \rangle$.

(a) Toon aan dat $\|Tv\| = \|v\|$.

(b) Toon aan $\dim W \geq \dim V$.

(c) Toon aan dat $(T^*T)v = v$ voor iedere $v \in V$.

(d) Toon aan dat de afbeelding $TT^* : W \rightarrow W$ een orthogonale projectie is.

4. Zij V een unitaire ruimte en $T : V \rightarrow V$ een lineaire afbeelding die zo is dat er een orthonormale basis $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_n\}$ van V is, die bestaat uit eigenvectoren van T . De bijbehorende eigenwaarden van T zijn $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ en die getallen zijn niet noodzakelijk reëel.

(a) Bewijs voor $v = \sum_{k=1}^n \alpha_k u_k$ en $w = \sum_{k=1}^n \beta_k u_k$ dat $\langle Tv, w \rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k \alpha_k \overline{\beta_k}$.

(b) Bepaal voor $v = \sum_{k=1}^n \beta_k u_k$ de vector T^*v .

5. Zij

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Het getal 2 is de enige eigenwaarde van A .

(a) Bereken een diagonaliseerbare matrix S en een nilpotente matrix N die zo zijn dat $A = S + N$ en $SN = NS$.

(b) Bereken e^{tA} .