

Voortgezette Lineaire Algebra

Prof. dr. J. van Mill

Dr. F. van Schagen

Inhoud

Programma	5
Studiehandleiding voor de cursus Voortgezette Lineaire Algebra	7
Hoofdstuk I. Complexe vectorruimten en inwendige producten	9
I.1. Vectorruimten	9
I.2. Hermitische producten	12
I.3. Inwendig-productruimten	20
I.4. De rangstelling	30
Hoofdstuk II. Bijzondere soorten operatoren	33
II.1. Functionalen	33
II.2. De geadjungeerde van een lineaire afbeelding	36
II.3. Projecties en directe sommen	43
II.4. Orthogonale projecties	49
II.5. Unitaire operatoren	58
II.6. De spectraalstelling voor zelfgeadjungeerde operatoren	63
Hoofdstuk III. Lineaire differentiaalvergelijkingen	71
III.1. De exponent van een matrix	71
III.2. De Jordan normaalvorm	79
Appendix 1: Ringen en lichamen	83
Appendix 2: Projectieoperatoren	85
Index	93

Programma

College Lineaire Algebra

<i>Schema (onder voorbehoud)</i>			
	<i>College</i>	<i>Huiswerk</i>	<i>Practicum</i>
Week 1	§1.1, §1.2	§1.1: 1, 2, 3 §1.2: $1^{a,b}$, 2, $4^{a,b}$,	§1.1: 5, 6, 8 §1.2: $1^{f,h}$, 4^c , 5^a , 6
Week 2	§1.3, §1.4	§1.3: 1, 3, 5, 7^a , 14^b §1.4: 1, 2, 3, 4	§1.3: $7^{b,c}$, 11, 12, $14^{a,c}$ §1.4: 5, 6
Week 3	§2.1, §2.2	§2.1: 1, 3 §2.2: 1, 2, 4, 8	§2.1: 4 §2.2: 7, 10, 14
Week 4	§2.3, §2.4	§2.3: $1^{a,b,c}$, 3, 4, 6, 12 §2.4: $1^{a,b,d}$, 3, 4, 9	§2.3: 7, 8, $9^{a,d}$, 11 §2.4: 8
Week 5	§2.5, §2.6	§2.5: $1^{a,b,c}$, 2, 4 §2.6: 1, 4, 7, 8	§2.5: 3, 5 §2.6: 2, 6, 5
Week 6	§3.1 §3.2	§3.2: 1 §3.2: 1	§3.1: 2, 3 §3.2: 2, 3

Studiehandleiding voor de cursus Voortgezette Lineaire Algebra

Inleiding. In het begin van de cursus Lineaire Algebra werkten we bijna uitsluitend met reële scalaires. Bij de bestudering van eigenwaarden kwamen complexe getallen zo nu en dan in beeld. We richten in deze cursus onze aandacht in de eerste plaats op vectorruimten met complexe in plaats van reële scalaires. Behandeld wordt de stof uit het dictaat "Voortgezette Lineaire Algebra" van J. van Mill en F. van Schagen.

Hoorcollege. Per college van twee maal drie kwartier komt een gedeelte van het dictaat aan de orde. Het helpt je als je het betreffende gedeelte van te voren hebt doorgelezen. Tijdens het college worden de aanbevolen oefeningen en het huiswerk opgegeven als er afwijkingen zijn van het programma in het dictaat (zie boven).

Leesopdrachten. Na het college bestudeer je nogmaals de behandelde stof. Zorg dat je de oplossingsmethoden beheerst, zodat je niet alles door terugbladeren moet opzoeken. Als er dingen zijn die je niet helemaal helder zijn, maak daarvan dan een aantekening en vraag ernaar op het vraagstukkenpracticum.

Huiswerkvraagstukken. De huiswerkvraagstukken bestaan uit sommen die je voor een groot gedeelte zelf kunt maken. Zo kun je nagaan of je de leerstof hebt begrepen. Er zijn ook wat moeilijker huiswerkvraagstukken. Op het practicum wordt het huiswerk in principe volledig besproken. Vaak is meer dan één oplossing van een bepaalde som mogelijk. Als de docent of één van je mede-studenten een andere oplossing dat de jouwe presenteert, aarzel dan niet om te vragen of jouw oplossing ook goed (of misschien wel beter) is.

Vraagstukkenpracticum. Tijdens het practicum wordt zoals al werd opgemerkt het huiswerk besproken en maak je onder begeleiding van de docent wat lastiger opgaven. Ook is er gelegenheid vragen te stellen over de leerstof.

Tijdsinvestering. De volgende tabel geeft een indicatie voor de per week aan de cursus te besteden tijd. De ervaring leert dat de meeste studenten hiermee de cursus met succes kunnen volgen. Sommigen zullen wellicht iets meer tijd moeten investeren.

hoorcollege	2 uur
vraagstukkenpracticum	2 uur
voorbereiding college	$\frac{1}{2}$ uur
bestuderen theorie	1 uur
huiswerk	$1\frac{1}{2}$ uur

HOOFDSTUK I

Complexe vectorruimten en inwendige producten

In het begin van de cursus Lineaire Algebra werkten we bijna uitsluitend met reële scalaires. Bij de bestudering van eigenwaarden kwamen complexe getallen zo nu en dan in beeld. We richten onze aandacht nu in de eerste plaats op vectorruimten met complexe in plaats van reële scalaires.

I.1. Vectorruimten

De scalaires die in de lineaire algebra optreden moeten een aantal eigenschappen hebben. We noemen de optelling, vermenigvuldiging en de deling door getallen die ongelijk aan 0 zijn. De algebraïsche objecten die de gewenste eigenschappen hebben heten *lichamen*. Lichamen worden in de Algebra bestudeerd. In een Appendix van dit dictaat staat voor de volledigheid de definitie van een lichaam. Hier noemen we alleen dat de

- reële getallen $\mathbb{R}$,

de

- complexe getallen $\mathbb{C}$

en de

- rationale getallen $\mathbb{Q}$

voorbeelden zijn van lichamen. In het vervolg verstaan wij onder een lichaam steeds één van $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ of $\mathbb{C}$.¹

We herhalen de definitie van *vectorruimte* V over het lichaam K .

Definitie I.1.1. Een *vectorruimte* over een lichaam K is een niet-lege verzameling V , waarvan de elementen *vectoren* heten, en waarop twee operaties bestaan,

¹Een minder bekend maar ook belangrijk lichaam is

- $\mathbb{F}_2$

dat bestaat uit slechts twee elementen, 0 en 1, met de volgende regels voor optelling ($+$) en vermenigvuldiging ($\cdot$)

$$\begin{aligned} 0 + 0 &= 0, & 0 + 1 &= 1 + 0 = 1, & 1 + 1 &= 0, \\ 0 \cdot 0 &= 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0, & 1 \cdot 1 &= 1. \end{aligned}$$

Vectorruimten, waarbij de scalaires uit $\mathbb{F}_2$ worden gekozen, spelen een rol in de Discrete Wiskunde en in de Informatica.

de *optelling* en de *scalaire vermenigvuldiging*, die voldoen aan de volgende lijst axioma's.

Voor willekeurige elementen u, v, w in V en willekeurige scalaren α en β uit K geldt:

- (1) Het resultaat van het optellen van u en v heet de som van u en v , is een element van V en wordt genoteerd als $u + v$,
- (2) $u + v = v + u$,
- (3) $u + (v + w) = (u + v) + w$,
- (4) Er is een nulvector 0 zodat $u + 0 = u$ voor alle u in V ,
- (5) Voor iedere vector u in V is er een vector $-u$ zodat $u + (-u) = 0$,
- (6) Het resultaat van het scalair vermenigvuldigen van u met α heet het product van α en u , zit in V en wordt genoteerd als αu ,
- (7) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$,
- (8) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$.
- (9) $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$,
- (10) $1u = u$.

Als het lichaam van de scalaren $\mathbb{R}$ is, dan spreken we over een

- *reële vectorruimte*

en als het lichaam van de scalaren $\mathbb{C}$ is, dan spreken we van

- *complexe vectorruimte*.

Hoewel in principe veel van de resultaten die we behandelen voor allerlei lichamen gelden zullen we in de praktijk van dit dictaat ons concentreren op complexe vectorruimten. Veel van de stof, die in het boek van Lay wordt besproken, geldt net zo goed voor complexe vectorruimten en complexe getallen als voor reële vectorruimten en reële getallen. We krijgen dus matrices en vergelijkingen met complexe getallen, de ruimte $\mathbb{C}^n$, complexe vectorruimten (met basis, dimensie en complexe coördinaten), eigenwaarden en determinanten van complexe matrices (al vervalt de betekenis van determinant als volume!). We herhalen niet al de resultaten, maar gebruiken ze zonder verder commentaar.

Omdat bij de begrippen lengte en inwendig product minder eenvoudig de reële getallen door de complexe kunnen worden vervangen, zullen complexe inwendige producten het eerste doel zijn waarop we de aandacht richten.

Opgaven voor §I.1.

- (1) Zij V de verzameling van de paren complexe getallen (z_1, z_2) met als optelling de componentsgewijze optelling en de vermenigvuldiging met een complexe scalar gedefinieerd door $\alpha(z_1, z_2) = (\alpha z_1, 0)$. Is V een vectorruimte?
- (2) Zij V de verzameling van de drietallen rationale getallen (q_1, q_2, q_3) die voldoen aan $2q_1 - q_2 + q_3 = b$, $b \in \mathbb{Q}$ vast, en met als optelling de componentsgewijze optelling en als vermenigvuldiging de componentsgewijze vermenigvuldiging. Is V een vectorruimte?
- (3) Zij $\mathcal{A} = \{A \mid A \subset \mathbb{R}\}$. Voor $A, B \in \mathcal{A}$ en $\lambda \in \mathbb{R}$ definiëren we

$$A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A),$$

en

$$\lambda A = \{\lambda a \mid a \in A\}.$$

Is $\mathcal{A}$ met deze operaties een vectorruimte? (Hint: zie $A + A$.)

- (4) Zij V een vectorruimte over K en $f \in V$ vast. Definieer een nieuwe optelling $\oplus$ en een nieuwe vermenigvuldiging $*$ in V door voor $g, h \in V$ en $\alpha \in K$ vast te bepalen dat

$$g \oplus h = g + h - f, \quad \alpha * g = \alpha g + (1 - \alpha)f.$$

Bewijs dat V met de operaties $\oplus$ en $*$ een vectorruimte is. (Zie je de relatie met [Lay, §4.1 voorbeeld 2]?)

- (5) Zij $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ de verzameling van de polynomen met complexe coëfficiënten van de graad ten hoogste n . Toon aan dat met de gewone optelling en scalaire vermenigvuldiging met complexe getallen $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ een complexe vectorruimte is. Als we alleen een vermenigvuldiging met reële scalaren definiëren, is $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ dan een reële vectorruimte?
- (6) Zij ℓ_2 de ruimte van de rijtjes complexe getallen $(a_n)_{n=1}^\infty$ met $\sum_{n=1}^\infty |a_n|^2 < \infty$. Bewijs dat ℓ_2 met de componentsgewijze optelling en vermenigvuldiging een vectorruimte is.
- (7) Zij H de ruimte van alle rijtjes complexe getallen $(a_n)_{n=-\infty}^\infty$ met de eigenschap dat voor iedere $t \in [-1, 1)$ de reeks $\sum_{n=-\infty}^\infty a_n e^{in\pi t}$ convergent is. Bewijs dat H met de componentsgewijze optelling en vermenigvuldiging een vectorruimte is.
- (8) Bewijs dat voor iedere vector u en scalar c in een vectorruimte V geldt dat $0u = 0$, $c0 = 0$ en $-u = (-1)u$.

I.2. Hermitische producten

De *complex geconjugeerde* $\bar{z}$ van het complexe getal $z = a + bi$ is het getal $\bar{z} = a - bi$. Voor een (complexe) matrix A stelt $\bar{A}$ de matrix voor waarvan het $(i, j)^e$ element de complex geconjugeerde is van het $(i, j)^e$ element van A . Merk op dat altijd $\overline{\bar{A}} = A$ en dat $\overline{AB} = \bar{A} \bar{B}$, als het product AB is gedefinieerd.

De definitie van een Hermitsch product

Definitie I.2.1. Een *Hermitisch product* op een vectorruimte V over het lichaam K is een afbeelding

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow K$$

zó, dat voor $u, v, w \in V$ en $\lambda \in K$ voldaan is aan de volgende voorwaarden:

- HP1 $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$;
- HP2 $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$;
- HP3 $\langle \lambda u, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle$.

Een Hermitisch product heet ook wel een *sesquilineaire vorm*. (Als $K = \mathbb{R}$, dan geldt uiteraard $\overline{\langle w, v \rangle} = \langle w, v \rangle$.)

Voor het geval dat $K = \mathbb{R}$ zijn diverse voorbeelden te vinden in [Lay, §6.1 en §6.7]. In de hier volgende voorbeelden beperken we ons tot complexe vectorruimten en complexe Hermitische producten.

Voorbeeld I.2.2. Zij $V = \mathbb{C}^2$. Voor $v = (v_1, v_2)$ en $w = (w_1, w_2)$ zij

$$\langle v, w \rangle = v_1 \bar{w}_1 + v_2 \bar{w}_2.$$

Dan is $\langle \cdot, \cdot \rangle$ een Hermitisch product op $\mathbb{C}^2$. Bewijs dat zelf door de voorwaarden HP1, HP2 en HP3 te controleren. $\square$

Voorbeeld I.2.3. Zij $V = \mathbb{C}^k$, en voor alle $i, j \leq k$ zij $a_{ij} \in \mathbb{C}$ zó, dat $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$. Definieer het Hermitische product van

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{bmatrix} \text{ en } w = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_k \end{bmatrix}$$

uit $\mathbb{C}^k$ als

$$(I.2.1) \quad \langle v, w \rangle = \sum_{i,j=1}^k v_i a_{ij} \bar{w}_j.$$

We controleren de voorwaarden HP1 tot en met HP3. Zij A de matrix $(a_{ij})_{i,j=1}^k$. Merk op dat uit de gegevens volgt dat $\bar{A} = A^T$. Het is handig om (I.2.1) als volgt

te schrijven

$$\langle v, w \rangle = v^T A \bar{w}.$$

(Reken dit na!) We controleren nu eerst HP1:

$$\langle v, w \rangle = v^T A \bar{w} = \overline{\bar{v}^T \overline{A \bar{w}}} = \overline{\bar{v}^T A^T w} = \overline{(w^T A \bar{v})^T} \stackrel{(!)}{=} \overline{w^T A \bar{v}} = \overline{\langle w, v \rangle},$$

omdat elk complex getal z'n eigen gespiegelde is.

Nu HP2:

$$\langle u + v, w \rangle = (u + v)^T A \bar{w} = (u^T + v^T) A \bar{w} = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle,$$

vanwege bekende rekenregels voor de matrixvermenigvuldiging.

Tenslotte HP3:

$$\langle \lambda u, v \rangle = (\lambda u)^T A \bar{v} = \lambda u^T A \bar{v} = \lambda \langle u, v \rangle.$$

□

De eigenschappen HP2 en HP3 vat men ook wel eens samen door te zeggen “ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is

- *lineair*

in de eerste variabele”. In het geval dat $K = \mathbb{C}$ merken we nog het volgende op. Uit HP1 tot en met HP3 volgt eenvoudig dat voor iedere $u, v, w \in V$ en $\lambda \in \mathbb{C}$ geldt

$$\begin{aligned} \langle u, v + w \rangle &= \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle, \\ \langle u, \lambda v \rangle &= \bar{\lambda} \langle u, v \rangle, \\ \langle v, v \rangle &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Merk bijvoorbeeld op dat $\langle v, v \rangle \in \mathbb{R}$ omdat uit HP1 volgt $\langle v, v \rangle = \overline{\langle v, v \rangle}$. Omdat $\langle u, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle u, v \rangle$ is duidelijk dat $\langle \cdot, \cdot \rangle$ niet lineair is in de tweede variabele. Dat zou immers inhouden dat $\langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$. We zeggen wel dat “ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is

- *anti-lineair*

in de tweede variabele.”

Bijzondere Hermitische producten

Een Hermitisch product heet

- *niet-gedegenereerd*

als het voldoet aan de volgende voorwaarde:

Als voor een zekere $v \in V$ geldt dat voor alle $w \in V$ geldt

$$\langle v, w \rangle = 0,$$

dan moet $v = 0$.

(Als $\langle v, w \rangle = 0$ dan zeggen we wel dat v en w

- *loodrecht*

op elkaar staan. Deze voorwaarde zegt dus dat voor een niet-gedegenereerd Hermitisch product 0 het enige element van V is dat loodrecht staat op alle andere elementen.)

Het Hermitische product uit Voorbeeld I.2.2 is niet-gedegenereerd.

Voorbeeld I.2.4. Zij $V = \mathbb{C}^2$ en voor $v = (v_1, v_2)$ en $w = (w_1, w_2)$ het Hermitische product gegeven door $\langle v, w \rangle = v_1 \overline{w_1}$. Zij $e_2 = (0, 1)$. Dan is $\langle e_2, w \rangle = 0$ voor alle $w \in \mathbb{C}^2$. Het product is dus gedegenereerd. $\square$

Het Hermitische product $\langle \cdot, \cdot \rangle$ op V heet

- *positief-definiet*

als voldaan is aan de volgende twee voorwaarden:

- (1) $\langle v, v \rangle \geq 0$ voor elke $v \in V$,
- (2) uit $\langle v, v \rangle = 0$ volgt dat $v = 0$.

Merk op dat een positief-definiet Hermitisch product in ieder geval niet-gedegenereerd is. (Neem in de voorwaarde voor niet-gedegenereerd maar $w = v$.)

Een positief-definiet Hermitisch product heet ook wel een *inwendig product* naar analogie met het geval dat $K = \mathbb{R}$. Voor dit speciale geval verwijzen we opnieuw naar [Lay, §6.7]. We noemen een niet gedegenereerd Hermitisch product ook wel een *indefinit inwendig product*.

Stelling I.2.5. Zij $V = K^n$ en definieer $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow K$ door

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n v_i \overline{w_i}.$$

Dan is $\langle \cdot, \cdot \rangle$ een inwendig product.

BEWIJS. De voorwaarden HP1, HP2 en HP3 hebben we bij Voorbeeld I.2.3 al geverifieerd. (Kies daar $a_{ij} = 0$ als $i \neq j$ en $a_{ii} = 1$ voor $i = 1, \dots, n$.) Merk verder op dat voor iedere $v \in V$ geldt

$$\langle v, v \rangle = \sum_{i=1}^n v_i \overline{v_i} = \sum_{i=1}^n |v_i|^2 \geq 0.$$

Bovendien, als $v \neq 0$, dan $|v_i| > 0$ voor tenminste één i en dus $\langle v, v \rangle > 0$. $\square$

We noemen het in Stelling I.2.5 beschreven product het

- *standaard Hermitisch product*

of

- *standaard inwendige product*

op K^n . We weten al dat er ook andere inwendige producten bestaan op $\mathbb{R}^n$. Hier volgt nog een simpel voorbeeld voor $\mathbb{C}^2$.

Voorbeeld I.2.6. Zij

$$\langle v, w \rangle = 2v_1\bar{w}_1 + v_1\bar{w}_2 + v_2\bar{w}_1 + v_2\bar{w}_2 = v^T \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \bar{w}.$$

We controleren alleen het positief-definiet zijn. Welnu

$$\begin{aligned} \langle v, v \rangle &= 2v_1\bar{v}_1 + v_1\bar{v}_2 + v_2\bar{v}_1 + v_2\bar{v}_2 \\ &= 2(v_1 + \tfrac{1}{2}v_2)(\overline{v_1 + \tfrac{1}{2}v_2}) + \tfrac{1}{2}v_2\bar{v}_2 \\ &= 2|v_1 + \tfrac{1}{2}v_2|^2 + \tfrac{1}{2}|v_2|^2. \end{aligned}$$

Hieruit volgt direct $\langle v, v \rangle \geq 0$ en $\langle v, v \rangle > 0$ als $v \neq 0$. $\square$

Voorbeeld I.2.7. Neem $V = \mathbb{P}_3(\mathbb{C})$, de vectorruimte van de veeltermen van de graad ten hoogste 3 in de variabele t met complexe coëfficiënten. Voor twee veeltermen $p(t)$ en $q(t)$ definiëren we

$$(I.2.2) \quad \langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)\overline{q(t)} dt.$$

Dan is $\langle \cdot, \cdot \rangle$ een inwendig product op $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$. De voorwaarden HP1, HP2 en HP3 zijn eenvoudig door uitschrijven te verifiëren (doen!). Ook geldt

$$\langle p, p \rangle = \int_0^1 p(t)\overline{p(t)} dt = \int_0^1 |p(t)|^2 dt \geq 0$$

omdat $|p(t)|^2 \geq 0$ voor alle $t \in [0, 1]$. Verder volgt uit $\langle p, p \rangle = 0$ dat $\int_0^1 |p(t)|^2 dt = 0$ en dus dat de niet-negatieve continue functie $|p(t)|^2$ gelijk is aan de nulfunctie. Daaruit concluderen we weer dat $p = 0$.

We kunnen ook schrijven $p(t) = \sum_{i=0}^3 p_i t^i$ en $q(t) = \sum_{i=0}^3 q_i t^i$ en dan uitrekenen dat

$$\begin{aligned} (I.2.3) \quad \langle p, q \rangle &= \int_0^1 p(t)\overline{q(t)} dt = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \int_0^1 t^{i+j} dt p_i \bar{q}_j \\ &= \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \frac{1}{i+j+1} p_i \bar{q}_j. \end{aligned}$$

We weten intussen dat dit een inwendig product op de ruimte $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ geeft. $\square$

Stelling I.2.8. Zij $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ een inwendig product op V en zij $T: W \rightarrow V$ een injectieve lineaire transformatie. Definieer

$$\langle w_1, w_2 \rangle_W = \langle T(w_1), T(w_2) \rangle_V$$

voor iedere $w_1, w_2 \in W$. Dan is $\langle w_1, w_2 \rangle_W$ een inwendig product op W .

BEWIJS. We controleren de voorwaarden:

- Voor HP1 zien we dat $\langle w_2, w_1 \rangle_W = \langle T(w_2), T(w_1) \rangle_V$. Omdat $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ een Hermitisch product op V is, volgt $\langle w_2, w_1 \rangle_W = \overline{\langle T(w_1), T(w_2) \rangle_V} = \overline{\langle w_1, w_2 \rangle_W}$.
- Voor HP2 en HP3 gebruiken we op dezelfde manier de eigenschappen van het Hermitische product op V .
- Verder volgt $\langle w, w \rangle_W = \langle T(w), T(w) \rangle_V \geq 0$. Tenslotte, als $\langle w, w \rangle_W = 0$, dan volgt dat $\langle T(w), T(w) \rangle_V = 0$. Omdat op V het Hermitische product positief-definiet is, concluderen we dat $T(w) = 0$. Dus $w = 0$, want T is injectief.

□

Voorbeeld I.2.9. Definieer op $\mathbb{C}^4$ het Hermitische product $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ door

$$\langle x, y \rangle_1 = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \frac{1}{i+j-1} x_i \overline{y_j}.$$

Het is niet zo eenvoudig na te gaan dat dit een inwendig product op $\mathbb{C}^4$ geeft.

Evenwel, definieer $T: \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ door

$$T: \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \mapsto a_1 + a_2 t + a_3 t^2 + a_4 t^3$$

Als $T(x) = p(t)$ en $T(y) = q(t)$, dan geldt $\langle x, y \rangle_1 = \langle p, q \rangle$, waarbij $\langle p, q \rangle$ gedefinieerd is in Voorbeeld I.2.7. Gebruik nu (I.2.3) en Stelling I.2.8 om te besluiten dat we inderdaad een inwendig product op de ruimte W hebben. Let erop dat de coëfficiënten van het polynoom in Voorbeeld I.2.7 genummerd zijn van 0 tot 3 en de kentallen van de vector in $\mathbb{C}^4$ van 1 tot 4. □

Zie ook [Lay, §7.2] voor andere manieren om te controleren dat Hermitische producten gegeven in de vorm $y^T A x$ positief-definiet zijn.

Hermitische producten en bases

We brengen even in herinnering dat de coördinaten van een vector v in de vectorruimte V ten opzichte van de basis $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ worden geschreven als $[v]_{\mathcal{B}}$. De volgende stelling laat zien dat Voorbeeld I.2.3 in feite heel algemeen is.

Stelling I.2.10. *Zij V een n -dimensionale vectorruimte over K en zij $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ een basis van V . Als $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow K$ een Hermitisch product is, dan geldt de volgende gelijkheid:*

$$\langle x, y \rangle = [x]_{\mathcal{B}}^T F \overline{[y]_{\mathcal{B}}},$$

waarbij $F = [\langle v_i, v_j \rangle]_{i,j=1}^n$ de $(n \times n)$ -matrix is met op plaats (i, j) het getal $\langle v_i, v_j \rangle$.

BEWIJS. Zij $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ en $y = \sum_{j=1}^n \mu_j v_j$ met $\lambda_i, \mu_j \in K$ voor $i, j \leq n$. Dan

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle v_i, y \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{j=1}^n \langle v_i, v_j \rangle \bar{\mu}_j = \sum_{i=1}^n \lambda_i \left[F \overline{[y]_{\mathcal{B}}} \right]_i = [x]_{\mathcal{B}}^T F \overline{[y]_{\mathcal{B}}}.$$

□

Merk op dat de matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^k$ van het Hermitisch product in Voorbeeld I.2.3 de eigenschap heeft dat $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$. Ook de matrix F uit Stelling I.2.10 heeft die eigenschap. Met dit in gedachte geven we de volgende definitie.

Definitie I.2.11. Een matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^k$ heet *Hermitisch* als $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ voor iedere i en j .

Voorbeeld I.2.12. De matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 + 3i \\ 2 - 3i & 3 \end{bmatrix}$$

is Hermitisch.

□

We maken aan paar opmerkingen.

- (1) De diagonaal elementen van een Hermitische matrix zijn reëel.
- (2) Een reële symmetrische matrix is Hermitisch.
- (3) De matrix F uit Stelling I.2.10 is uniek. Immers, veronderstel dat $\langle x, y \rangle = [x]_{\mathcal{B}}^T G \overline{[y]_{\mathcal{B}}}$ met $G = (g_{ij})_{i,j=1}^n$. Dan volgt met e_i^T de i -de rij van de eenheidsmatrix en e_j de j -de kolom van de eenheidsmatrix dat

$$\langle v_i, v_j \rangle = e_i^T G e_j = g_{ij}.$$

Dus $G = F$.

- (4) Als $K = \mathbb{R}$, dan is de matrix F een reële symmetrische matrix.
- (5) Als een Hermitische matrix A de eigenschap heeft dat $\langle v, w \rangle = v^T A \bar{w}$ een inwendig product is, dan heet A zelf
 - *positief definitief*.

Zie ook [Lay, §7.2 Theorem 5], en de daarop volgende opmerking.

Stelling I.2.13. Zij V een n -dimensionale vectorruimte over K en zij $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ een basis van V . Als A een Hermitische $(n \times n)$ -matrix is, dan definieert

$$\langle x, y \rangle = [x]_{\mathcal{B}}^T A \overline{[y]_{\mathcal{B}}},$$

een Hermitisch product op V .

BEWIJS. Dit kan bewezen worden zoals in Voorbeeld I.2.3. $\square$

Hermitische producten komen dus overeen met Hermitische matrices, en omgekeerd.

Nog enkele begrippen

We zullen in het vervolg vaak de volgende termen gebruiken. Een

- *inwendig-productruimte* (kortweg een *i.p.ruimte*)

is een vectorruimte over $\mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$ met een inwendig product. Een eindig-dimensionale i.p.ruimte heet als $K = \mathbb{R}$ een

- *euclidische ruimte*

en als $K = \mathbb{C}$ een

- *unitaire ruimte*.

Uit Stelling I.2.5 volgt dat $\mathbb{R}^n$ met het standaard inwendige product een euclidische ruimte is en $\mathbb{C}^n$ met het standaard inwendige product een unitaire ruimte is.

Voorbeeld I.2.14. Zij

$$V = \{X \mid X \text{ is een stochastische variabele met } \mathbb{E}X^2 < \infty\}.$$

Dan is V met de gebruikelijke optelling en scalaire vermenigvuldiging een vectorruimte over $\mathbb{R}$. Definieer $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ door $\langle X, Y \rangle = \mathbb{E}XY$. Dan is $\langle \cdot, \cdot \rangle$ een inwendig product. $\square$

Opgaven voor §I.2.

- (1) Ga in elk van de volgende gevallen na of een Hermitisch product wordt gedefinieerd. Zo ja, is het ook een inwendig product?
 - (a) in $\mathbb{C}^2$: $\langle x, y \rangle = 2x_1\bar{y}_1 + ix_1\bar{y}_2 + ix_2\bar{y}_1 + 3x_2\bar{y}_2$.
 - (b) in $\mathbb{C}^2$: $\langle x, y \rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$.
 - (c) in $\mathbb{R}^3$: $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$.
 - (d) in $\mathbb{C}^3$: $\langle x, y \rangle = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + (1+i)x_2\bar{y}_3 + (1-i)x_3\bar{y}_2 + x_3\bar{y}_3$.
 - (e) in $\mathbb{R}^3$: $\langle x, y \rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.
 - (f) in $\mathbb{C}^3$: $\langle x, y \rangle = x_1\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_3 + 2x_3\bar{y}_2 + 4x_2\bar{y}_2 + x_3\bar{y}_3$.
 - (g) in $\mathbb{C}^3$: $\langle x, y \rangle = 3x_1\bar{y}_1 - 2x_1\bar{y}_2 + x_2\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 - x_3\bar{y}_3$.
 - (h) in $\mathbb{C}^3$: $\langle x, y \rangle = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + x_3\bar{y}_3$.
- (2) Geef een voorbeeld van een reële symmetrische (2×2) -matrix met de eigenschap dat $\langle x, y \rangle = x^T M \bar{y}$ voor $x, y \in \mathbb{C}^2$ een niet-triviaal gedefinieerd Hermitisch product geeft.
- (3) Ga na welke van volgende Hermitische producten op $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ positief definiëet zijn:
 - (a) $\langle p, q \rangle = p(1)\overline{q(1)}$.
 - (b) $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p'(x)\overline{q'(x)}dx$. (p' staat voor de afgeleide van p .)
 - (c) $\langle p, q \rangle = \int_0^1 e^x p(x)\overline{q(x)}dx$.
- (4) Zij V de reële vectorruimte van de continue reëel waardige functies op het interval $[-1, 1]$. Ga na in welke van de volgende gevallen $\langle \cdot, \cdot \rangle$ een inwendig product is.
 - (a) $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)t^2 dt$.
 - (b) $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)t^2 dt$.
 - (c) $\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$.
- (5) Ga na of in de volgende gevallen een inwendig product wordt gedefinieerd:
 - (a) In $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ door $\langle p, q \rangle = \sum_{k=1}^3 p(k)\overline{q(k)}$.
 - (b) In de reële vectorruimte van de continue reëel waardige functies op het interval $[1, 2]$ door $\langle f, g \rangle = \int_1^2 f(t)g(t)\sin(t)dt$.
- (6) Zij A een reële $(n \times k)$ -matrix van rang k . Bewijs dat $\langle x, y \rangle = x^T A^T A \bar{y}$ een inwendig product op $\mathbb{C}^k$ is.
- (7) Zij $\langle \cdot, \cdot \rangle$ een inwendig product op de ruimte V . Leidt uit de definitie van inwendig product af dat $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$ en $\langle u, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle u, v \rangle$.
- (8) Zij V een vectorruimte over het lichaam K , de verzameling $\mathcal{B}$ een basis van V , en $\langle \cdot, \cdot \rangle$ gedefinieerd door $\langle v, w \rangle = ([v]_{\mathcal{B}})^T M \overline{[w]_{\mathcal{B}}}$, waarbij M een niet-Hermitische matrix is. Bewijs dat $\langle \cdot, \cdot \rangle$ geen Hermitisch product is.

I.3. Inwendig-productruimten

De ruimte $\mathbb{R}^n$ met het standaard inwendig product kennen we al uit [Lay, Hoofdstuk 6]. Verder komen in [Lay, §6.7] inwendig-productruimten en algemene reële inwendige producten aan de orde. Hier zullen we laten zien dat veel van de resultaten uit Lay over te dragen zijn op complexe inwendig-productruimten.

Afstandsmeting

Definitie I.3.1. Voor een element v van de inwendig-productruimte definiëren we de norm of lengte als $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

Merk op dat de norm van een vector altijd een reëel niet-negatief getal is. Als $v, w \in V$, dan wordt de *afstand* $d(v, w)$ gedefinieerd door $d(v, w) = \|v - w\|$.

Lemma I.3.2. *Zij V een inwendig-productruimte en $u, v, w \in V$ en $\alpha \in K$. Dan:*

- (1) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$;
- (2) $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$;
- (3) $d(v, w) = 0$ als en alleen als $v = w$;
- (4) $d(v, w) = d(w, v)$;
- (5) $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$.

BEWIJS. (1) zullen we later bewijzen, zie Gevolg I.3.8.

Voor het bewijs van (2) gaan we als volgt te werk:

$$\|\alpha v\|^2 = \langle \alpha v, \alpha v \rangle = \alpha \bar{\alpha} \langle v, v \rangle = |\alpha|^2 \|v\|^2.$$

De derde bewering volgt direct uit het positief-definiet zijn van het inwendig product.

De vierde bewering volgt uit

$$d(v, w) = \|v - w\| = \sqrt{\langle v - w, v - w \rangle} = \sqrt{\langle w - v, w - v \rangle} = \|w - v\| = d(w, v).$$

Voor de vijfde bewering gebruiken we eerst de eerste om te zien dat

$$\|(u - v) + (v - w)\| \leq \|u - v\| + \|v - w\|.$$

Daarna berekenen we

$$d(u, w) = \|u - w\| = \|(u - v) + (v - w)\| \leq \|u - v\| + \|v - w\| = d(u, v) + d(v, w).$$

□

In de onderdelen (3), (4) en (5) van Lemma I.3.2 staat precies te lezen dat de afstandsfunctie d een metriek geeft op de vectorruimte V . (Voor meer over afstandsfuncties: zie het college Topologie.) Zo is (5) de bekende *driehoeksongelijkheid*.

We zeggen dat

- v loodrecht staat op w

als $\langle v, w \rangle = 0$. We schrijven dan $v \perp w$. Merk op dat als $v \perp w$ dan $w \perp v$.

Voorbeeld I.3.3. Zij $V = \mathbb{C}^2$. Dan staan de vectoren $v = (1, i)$ en $w = (1, -i)$ loodrecht op elkaar. Immers $\langle v, w \rangle = 1 \cdot \bar{1} + i \cdot \overline{-i} = 1 \cdot 1 + i \cdot i = 0$. $\square$

Voorbeeld I.3.4. In het inwendige product uit Voorbeeld I.2.7 staan de vectoren $p(t) = 1$ en $q(t) = -\frac{1}{2} + t$ loodrecht op elkaar. Dat volgt uit de berekening:

$$\int_0^1 p(t) \overline{q(t)} dt = \int_0^1 \left(-\frac{1}{2} + t\right) dt = 0.$$

$\square$

Met het boven gedefinieerde begrip loodrecht kunnen we de stelling van Pythagoras bewijzen.

Stelling I.3.5 (Pythagoras). *Als $v \perp w$ voor de vectoren v en w in de i.p.ruimte V , dan $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$.*

BEWIJS. We berekenen:

$$\|v + w\|^2 = \langle v + w, v + w \rangle = \langle v, v \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle = \|v\|^2 + 0 + 0 + \|w\|^2.$$

$\square$

Voor een euclidische ruimte weten we dat als twee vectoren zo zijn dat

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2,$$

dan $v \perp w$. (Bewijs dat uit de definities!) Dit geldt niet in een unitaire ruimte. Neem bijvoorbeeld $V = \mathbb{C}$, $v = 1$ en $w = i$.

Het volgende resultaat geeft enige eigenschappen van de afstandsfuncties die horen bij een inwendig product.

Lemma I.3.6. *Zij V een unitaire ruimte. Dan:*

- (1) *Voor ieder tweetal vectoren v en w in V geldt de parallelogram-identiteit:*

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2;$$

- (2) *Voor ieder tweetal vectoren v en w in V geldt de polarisatieformule:*

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{4} \left((\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2) + i(\|v + iw\|^2 - \|v - iw\|^2) \right).$$

Het bewijs wordt geleverd door $\|v + \alpha w\|^2$ uit te schrijven als een inwendig product (opgave).

Bedenk dat een afstandsfunctie, die niet voldoet aan de parallelogram-identiteit, niet afkomstig kan zijn van een inwendig product. Verder geeft polarisatieformule het inwendig product in termen van zijn afstandsfunctie wat handig is bij het

afleiden van eigenschappen van het inwendig product uit eigenschappen van de lengte.

Basisongelijkheden

Als v en $w \neq 0$ elementen zijn van de i.p.ruimte V , dan is er een getal α zodat $v - \alpha w \perp w$. Omdat dit betekent $\langle v - \alpha w, w \rangle = 0$, volgt direct dat $\alpha = \langle v, w \rangle / \langle w, w \rangle$. Net als in het speciale geval van de euclidische ruimte (Zie [Lay, §6.2]) heet αw de

- *projectie van v langs w .*

Het getal α heet ook wel de

- *Fouriercoëfficiënt*

van v met betrekking tot w .

Stelling I.3.7 (De ongelijkheid van Cauchy-Schwarz). *Voor de vectoren v en w in de i.p.ruimte V geldt dat*

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|.$$

BEWIJS. Voor $w = 0$ is de ongelijkheid een gelijkheid. Veronderstel nu verder dat $w \neq 0$. Kies $\alpha = \langle v, w \rangle / \langle w, w \rangle$, dan weten we dat $v - \alpha w \perp w$ en dus ook $v - \alpha w \perp \alpha w$. Uit de Stelling van Pythagoras volgt dat

$$\|v\|^2 = \|\alpha w\|^2 + \|v - \alpha w\|^2.$$

Dan volgt dat $|\alpha|^2 \|w\|^2 = \|\alpha w\|^2 \leq \|v\|^2$. Dit impliceert

$$|\alpha| \leq \frac{\|v\|}{\|w\|}.$$

Dat betekent

$$\frac{|\langle v, w \rangle|}{\|w\|^2} \leq \frac{\|v\|}{\|w\|},$$

waaruit het gestelde volgt. □

Uit de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz kunnen we het eerste onderdeel van Lemma I.3.2 afleiden. We gebruiken de volgende triviale afschatting: als $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) dan geldt

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a \leq 2\sqrt{a^2 + b^2} = 2|z|.$$

Gevolg I.3.8. *Voor de vectoren v en w in de i.p.ruimte V geldt*

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$

BEWIJS.

$$\begin{aligned}
 \|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w \rangle = \langle v, v \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle \\
 &= \langle v, v \rangle + \langle v, w \rangle + \overline{\langle v, w \rangle} + \langle w, w \rangle \\
 &\leq \langle v, v \rangle + 2|\langle v, w \rangle| + \langle w, w \rangle \\
 (I.3.1) \quad &\leq \langle v, v \rangle + 2\|v\| \cdot \|w\| + \langle w, w \rangle \\
 &= (\|v\| + \|w\|)^2.
 \end{aligned}$$

De ongelijkheid (I.3.1) volgt uiteraard uit de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz. $\square$

Voorbeeld I.3.9. Zij V de vectorruimte van de continue complex-waardige functies op het interval $[-\pi, \pi]$ met het inwendig product

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Dit is een i.p.ruimte. (Vergelijk. [Lay, §6.7 voorbeeld 7] en Voorbeeld I.2.7 uit dit dictaat.) Voor een natuurlijk getal k definiëren we $f(t) = e^{ikt}$. Dan is

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |e^{ikt}|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} dt \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi}.$$

Als $g \in V$, dan is de Fouriercoëfficiënt van g met betrekking tot f

$$\frac{\langle g, f \rangle}{\langle f, f \rangle} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-ikt} dt.$$

Als f een eenheidsvector zou zijn, bijvoorbeeld $f(t) = e^{ikt}/\sqrt{2\pi}$, dan vinden we voor de Fouriercoëfficiënt van g met betrekking tot f het getal $\langle g, f \rangle$. $\square$

Als ieder tweetal uit een stelsel vectoren onderling loodrecht is dan heet het stelsel een

- *orthogonaal stelsel*.

We noemen een orthogonaal stelsel vectoren

- *orthonormaal*

als ieder van de vectoren de lengte 1 heeft. Met andere woorden $v_1, \dots, v_n$ is een orthonormaal stelsel als $\|v_i\| = 1$, $i = 1, \dots, n$ en $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ voor $1 \leq i < j \leq n$.

Net als voor het standaard inwendig product op $\mathbb{R}^n$ zijn de coördinaten van een vector ten opzichte van een orthonormale basis gemakkelijk uit te rekenen (zie [Lay, §6.2, Theorem 5]).

Lemma I.3.10. Zij $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_n\}$ een orthonormale basis in de i.p.ruimte V , en zij $v \in V$. Dan geldt

$$v = \langle v, c_1 \rangle c_1 + \dots + \langle v, c_n \rangle c_n.$$

De getallen $\langle v, c_1 \rangle, \dots, \langle v, c_n \rangle$ zijn dus de coördinaten van v ten opzichte van $\mathcal{C}$.

BEWIJS. Daar $\mathcal{C}$ een basis is, bestaan er scalaren $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ met $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i$. Dan volgt uit elementaire rekenregels en het feit dat $\mathcal{C}$ orthonormaal is voor elke $m \leq n$ dat

$$\langle v, c_m \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i, c_m \right\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle c_i, c_m \rangle = \lambda_m.$$

Dit is zoals gewenst. $\square$

Met dezelfde methode bewijzen we dat

Lemma I.3.11. *Een orthonormaal stelsel in een i.p.ruimte is lineair onafhankelijk.*

BEWIJS. Zij $\mathcal{C} = \{v_1, \dots, v_n\}$ een orthonormaal stelsel in de i.p.ruimte V . Kies willekeurige $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ zodat $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$. Voor elke $m \leq n$ geldt nu

$$0 = \langle 0, v_m \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, v_m \right\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle v_i, v_m \rangle = \alpha_m.$$

Dus $\mathcal{C}$ is lineair onafhankelijk. $\square$

Stelling I.3.12 (De ongelijkheid van Bessel). *Zij $v_1, \dots, v_n$ een orthonormaal stelsel in de i.p.ruimte V . Zij α_i de Fouriercoëfficiënt van v met betrekking tot v_i . Dan*

$$(I.3.2) \quad \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \leq \|v\|^2.$$

BEWIJS. We berekenen dat

$$\left\langle v - \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, v - \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right\rangle = \langle v, v \rangle - \sum_{i=1}^n \overline{\alpha_i} \langle v, v_i \rangle - \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle v_i, v \rangle + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \overline{\alpha_j} \langle v_i, v_j \rangle.$$

Gebruik nu dat $\alpha_i = \langle v, v_i \rangle$ en $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ tenzij $i = j$ en dan $\langle v_i, v_j \rangle = 1$, om in te zien dat

$$\left\langle v - \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, v - \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right\rangle = \langle v, v \rangle - \sum_{i=1}^n \overline{\alpha_i} \alpha_i - \sum_{i=1}^n \alpha_i \overline{\alpha_i} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \overline{\alpha_i}.$$

Er staat

$$(I.3.3) \quad \left\langle v - \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, v - \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right\rangle = \|v\|^2 - \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2.$$

Omdat de linker kant van deze gelijkheid niet-negatief is, volgt (I.3.2). $\square$

Gevolg I.3.13. *Zij $v_1, \dots, v_n$ een orthonormale basis in de i.p.ruimte V en $v \in V$. Dan*

$$(I.3.4) \quad \sum_{i=1}^n |\langle v, v_i \rangle|^2 = \|v\|^2.$$

BEWIJS. Bedenk dat $v = \sum_{i=1}^n \langle v, v_i \rangle v_i$ (Lemma I.3.10). Herhaal nu het bewijs van Stelling I.3.12 en merk op dat het linker lid van (I.3.3) nu 0 is. Het rechterlid van (I.3.3) levert daarom (I.3.4). $\square$

Formules voor matrices van lineaire afbeeldingen

Net als in het reële geval kunnen we met behulp van het Gram-Schmidt proces ([Lay, §6.4]) uit een stelsel een orthonormaal stelsel maken. Behalve dat de getallen nu complex kunnen zijn is er geen enkel verschil. Voor een eindig dimensionale i.p.ruimte is er dus altijd een orthonormale basis te vinden. Dit levert de volgende stelling.

Stelling I.3.14. *Iedere eindig dimensionale i.p.ruimte heeft een orthonormale basis.*

Ons doel is nu de relatie tussen inwendige producten en matrices voor lineaire afbeeldingen te bespreken. Allereerst brengen we enkele resultaten uit Lay in herinnering.

Neem aan dat V en W vectorruimten zijn over het lichaam K . Zij $\mathcal{B}$ een basis van V en $\mathcal{C}$ een basis van W en $T: V \rightarrow W$ een lineaire afbeelding. Volgens [Lay, §5.4] bestaat er dan een matrix M zò, dat voor elke $x \in V$,

$$[T(x)]_{\mathcal{C}} = M[x]_{\mathcal{B}}.$$

Die matrix M heet de matrix van T ten opzichte van de bases $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$, en wordt genoteerd met $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$. Dan geldt dus voor elke $v \in V$ de volgende gelijkheid:

$$[T(x)]_{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}[x]_{\mathcal{B}}.$$

Om die formule te onthouden:

- (1) $T(x) \in W$ en dus heeft $T(x)$ coördinaten ten opzichte van $\mathcal{C}$;
- (2) $x \in V$ en dus heeft x coördinaten ten opzichte van $\mathcal{B}$;
- (3) De afbeelding T gaat van V naar W en $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ moet dus van $\mathcal{B}$ naar $\mathcal{C}$ gaan, wat mede tot uitdrukking komt in het ‘weg kunnen strepen’ van de boven- en beneden-index $\mathcal{B}$ in de formule.

Er staat in [Lay, §5.4] ook een formule voor $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$, namelijk, als $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ dan

$$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [T(b_1)]_{\mathcal{C}} & \cdots & [T(b_n)]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix}.$$

In dit verband herinneren we nog aan de coördinaten-overgang uit [Lay, §4.7]. Daar is voor $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$ bases van V de overgang van coördinaten ten opzichte van

$\mathcal{B}$ naar coördinaten ten opzichte van $\mathcal{C}$ als volgt gegeven:

$$[x]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}[x]_{\mathcal{B}}$$

($x \in V$). Dus feitelijk

$$P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = [\text{Id}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}},$$

waarbij $\text{Id}: V \rightarrow V$ de identieke afbeelding is die x aan x toevoegt.

Zij nu V en W i.p.ruimten. Als $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_m\}$ een orthonormale basis van W is, dan is volgens Lemma I.3.10

$$[T(v)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \langle Tv, c_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle Tv, c_m \rangle \end{bmatrix}.$$

We vinden aldus het volgende lemma.

Lemma I.3.15. *Zij nu V en W i.p.ruimten. De matrix van $T: V \rightarrow W$ ten opzichte de basis $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ van V en de orthonormale basis $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_m\}$ van W is de $m \times n$ matrix*

$$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \langle Tb_1, c_1 \rangle & \cdots & \langle Tb_n, c_1 \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle Tb_1, c_m \rangle & \cdots & \langle Tb_n, c_m \rangle \end{bmatrix}.$$

Let in Lemma I.3.15 op het aantal rijen en kolommen en de formule

$$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}[x]_{\mathcal{B}} = [T(x)]_{\mathcal{C}}.$$

Voorbeeld I.3.16. Zij $\mathbb{P}_2$ (zie [Lay, §4.1 pagina 212]) voorzien van het inwendige product

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(t)q(t)dt.$$

Zij $p_1(t) = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $p_2(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}t$ en $p_3(t) = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(t^2 - \frac{1}{3})$. Dan is $\mathcal{C} = \{p_1, p_2, p_3\}$ een orthonormale basis van $\mathbb{P}_2$. Verder is $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, t^3\}$ een basis van $\mathbb{P}_3$. De afbeelding $D: \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_2$ wordt gegeven door $(D(p))(t) = p'(t)$ (differentiatie). We bepalen de matrix $[D]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$. Daarvoor moeten we de inwendige producten $\langle D(t^j), p_i \rangle$ bepalen voor $i = 1, \dots, 3$ en $j = 0, \dots, 3$. Voor $j = 0$ is $D(t^0) = 0$ en dus is $\langle D(t^0), p_i \rangle = 0$ voor alle waarden van i . Bij het berekenen is het goed te bedenken dat als j oneven is dan $\int_{-1}^1 t^j dt = 0$. We vinden

$$[D]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{\frac{2}{5}} \end{bmatrix}.$$

Ga zelf de berekeningen zorgvuldig na. □

Opgaven voor §I.3.

- (1) Voor ieder tweetal vectoren
- $x, y \in \mathbb{C}^2$
- definiëren we

$$\langle x, y \rangle = x_1 \overline{y_1} - x_1 \overline{y_2} - x_2 \overline{y_1} + 2x_2 \overline{y_2}.$$

Dan is $\langle \cdot, \cdot \rangle$ een inwendig product op $\mathbb{C}^2$. Bepaal nu

- (a) De component van $(1, 0)$ langs $(0, 1)$.
- (b) De lengte van $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ en $(1, i)$.

- (2) Voor ieder tweetal vectoren
- $x, y \in \mathbb{C}^2$
- definieren we

$$\langle x, y \rangle = x_1 \overline{y_1} + (1 + 2i)x_1 \overline{y_2} + (1 - 2i)x_2 \overline{y_1} + 6x_2 \overline{y_2}.$$

Bewijs dat $\langle \cdot, \cdot \rangle$ een inwendig product is. Bepaal vervolgens

- (a) De component van $(1, 0)$ langs $(0, 3 + 2i)$.
- (b) De lengte van $(1, 0)$ en $(2 - i, 2 + 2i)$.
- (c) Alle vectoren die loodrecht staan op $(1, 0)$.

- (3) Zij
- V
- de complexe vectorruimte van alle polynomen met complexe coëfficiënten. Zij

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(t) \overline{q(t)} dt.$$

Zij $p(t) = (2 - i)t$ en $q(t) = 1 - t$. Bereken de afstand $d(p, q)$.

- (4) Zij V een i.p.ruimte. Bewijs voor alle $v, w \in V$ $|||v|| - ||w||| \leq \|v - w\|$. Dit heet de *omgekeerde driehoeksongelijkheid*.
- (5) Zij V een i.p.ruimte, en $F: V \rightarrow V$ een afbeelding met de eigenschap dat $\langle Fv, w \rangle = \langle v, Fw \rangle$ voor alle $v, w \in V$. Bewijs dat F lineair is.
- (6) Zij V een 3-dimensionale unitaire ruimte en zij $\{u, v, w\}$ een orthonormale basis van V .
 - (a) Bepaal alle vectoren $z \in V$ met $\langle u, z \rangle = 1$, $\langle v, z \rangle = 2$ en $\langle w, z \rangle = 3$.
 - (b) Bepaal alle vectoren $z \in V$ met $\langle z, z \rangle = \frac{3}{2}$, $\langle u, z \rangle = 1$ en $\langle v, z \rangle = \frac{1}{2}$.
 - (c) Bepaal alle vectoren $z \in V$ met $z \perp u + z$, $z \perp v + z$ en $z \perp w - z$.
- (7) Zij V de reële vectorruimte van alle polynomen met reële coëfficiënten en met de graad ten hoogste 2. Op V definieren we

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + \int_0^1 p'(t)q'(t)dt.$$

- (a) Bewijs dat $\langle \cdot, \cdot \rangle$ een Hermitisch product definieert op V .
- (b) Is $\langle \cdot, \cdot \rangle$ een inwendig product?
- (c) Zij $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$. Dan is $\mathcal{B}$ een basis voor V . Bepaal een matrix M zó dat voor alle $p, q \in V$ geldt dat $\langle p, q \rangle = [p]_{\mathcal{B}}^T M [q]_{\mathcal{B}}$.

- (8) Zij V een unitaire ruimte en zij $\{v_1, \dots, v_k\}$ een orthogonale basis van V . Bewijs dat voor iedere $x \in V$ geldt

$$x = \sum_{j=1}^k \frac{\langle x, v_j \rangle}{\langle v_j, v_j \rangle} v_j.$$

- (9) Bewijs Lemma I.3.6.

- (10) Definieer $\rho: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ door

$$\rho(x) = |x_1|^2 + |x_2|^2 - 2\operatorname{Im}(x_1 \overline{x_2})$$

waarbij $\operatorname{Im} z$ staat voor het imaginaire deel van z . Toon aan dat er een inwendig product $\langle \cdot, \cdot \rangle$ op $\mathbb{C}^2$ is zò, dat voor elke $x \in \mathbb{C}^2$ geldt $\rho(x) = \|x\|^2$.

- (11) Zij V een i.p.ruimte. Bewijs dat het stelsel $\{v, w\}$ afhankelijk is als en alleen als $|\langle v, w \rangle| = \|v\| \cdot \|w\|$. (Aanwijzing: zie het bewijs van de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz.)
- (12) Zij $z_1, \dots, z_n$ complexe getallen met $z_1 + \dots + z_n = 1$.
 (a) Toon aan dat $|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 \geq \frac{1}{n}$.
 (b) Toon aan dat het gelijktken in (1) alleen geldt als $z_1 = z_2 = \dots = z_n$. (Aanwijzing: gebruik de vorige opgave.)
- (13) Zij V een n -dimensionale unitaire ruimte. Zij $\{v_1, \dots, v_k\}$ zò, dat voor iedere $x \in V$ geldt

$$\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^k |\langle x, v_i \rangle|^2.$$

- (a) Bewijs dat voor iedere $x, y \in V$ geldt

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^k \langle x, v_i \rangle \langle v_i, y \rangle,$$

en

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \left(\sum_{i=1}^k \langle x, v_i \rangle v_i \right), y \right\rangle.$$

(Hint: gebruik de polarisatieformule.)

- (b) Bewijs dat voor iedere $x \in V$ geldt:

$$x = \sum_{i=1}^k \langle x, v_i \rangle v_i.$$

- (c) Zij $A = (a_{ij})_{i,j=1}^k$ de $(k \times k)$ -matrix met $a_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$. Bewijs dat $A^2 = A$.
- (d) Bewijs dat het stelsel $\{v_1, \dots, v_k\}$ een onafhankelijk n -tal bevat.

(14) Zij V een complexe vectorruimte. Een functie $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$ heet een norm als

- (1) $\|v\| \geq 0$ voor alle $v \in V$,
- (2) Als $\|v\| = 0$ dan $v = 0$,
- (3) $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$,
- (4) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Sommige normen $\|\cdot\|$ zijn afkomstig van een inwendig product $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in die zin dat voor elke $v \in V$ de volgende gelijkheid geldt: $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

Ga in de volgende gevallen na of

- er sprake is van een norm op V ,
 - de norm afkomstig is van een inwendig product en, zo ja,
 - wat dat inwendige product dan is.
- (a) $V = \mathbb{C}^2$, $\|v\| = |v_1| + |v_2|$;
 - (b) $V = \mathbb{C}^2$, $\|v\| = \sqrt{|v_1|^2 + |v_2|^2}$;
 - (c) $V = \mathbb{C}^2$, $\|v\| = \max\{|v_1|, |v_2|\}$;
 - (d) $V = \mathbb{C}^2$, $\|v\| = \sqrt{|v_1|^2 + \operatorname{Re} v_1 \overline{v_2} + |v_2|^2}$;
 - (e) $V = \mathbb{P}_3(\mathbb{C})$, $\|p\| = \int_0^1 |p(t)| dt$;
 - (f) $V = \mathbb{P}_3(\mathbb{C})$, $\|p\| = \int_0^1 |p(t)|^2 e^t dt$;
 - (g) $V = \mathbb{P}_3(\mathbb{C})$, $\|p\| = \max\{|p(t)| \mid 0 \leq t \leq 1\}$.

I.4. De rangstelling

In deze paragraaf geven we een generalisatie van de rangstelling ([Lay, Theorem 14 op pagina 259]). De stelling wordt ook wel de hoofdstelling van de lineaire algebra genoemd.

Stelling I.4.1. *Laat V en W vectorruimten zijn over K en neem aan dat V eindig-dimensionaal is. Als $T: V \rightarrow W$ een lineaire afbeelding is, dan geldt*

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T.$$

BEWIJS. Daar $\operatorname{Ker} T$ een lineaire deelruimte van V is, is $\operatorname{Ker} T$ ook eindig dimensionaal. Zij $\{a_1, \dots, a_k\}$ een basis van $\operatorname{Ker} T$. Dan geldt $T(a_i) = 0$ voor $i = 1, \dots, k$. We vullen het onafhankelijke stelsel $\{a_1, \dots, a_k\}$ in V aan tot een basis

$$\mathcal{C} = \{a_1, \dots, a_k, v_1, \dots, v_r\}$$

van V ([Lay, Theorem 11 op pagina 253]). Zij $b_i = T(v_i)$, $i = 1, \dots, r$. Merk op dat $\{b_1, \dots, b_r\} \subset \operatorname{Im} T$. We zullen bewijzen dat $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_r\}$ een basis is van $\operatorname{Im} T$. Stel $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ zijn zo, dat $\sum_{i=1}^r \lambda_i b_i = 0$. Daar

$$T\left(\sum_{i=1}^r \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^r \lambda_i T(v_i) = \sum_{i=1}^r \lambda_i b_i = 0$$

volgt $\sum_{i=1}^r \lambda_i v_i \in \operatorname{Ker} T$. Omdat $\{a_1, \dots, a_k\}$ een basis is van $\operatorname{Ker} T$ zijn er scalaren $\mu_1, \dots, \mu_k \in K$ zo dat

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i v_i = \sum_{j=1}^k \mu_j a_j$$

en dus

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^k (-\mu_j) a_j = 0.$$

Vanwege de onafhankelijkheid van $\mathcal{C}$ volgt dat $\lambda_i = 0$ voor $1 \leq i \leq r$. We zien dat $\mathcal{B}$ een onafhankelijk stelsel is.

Zij nu $y \in \operatorname{Im} T$. Dan $y = T(v)$ voor zekere $v \in V$. Zij $v = \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^k \mu_j a_j$. Dan

$$y = T(v) = \sum_{i=1}^r \lambda_i T(v_i) + \sum_{j=1}^k \mu_j T(a_j) = \sum_{i=1}^r \lambda_i b_i.$$

omdat $\{a_1, \dots, a_k\} \subset \operatorname{Ker} T$. Dus zien we dat iedere $y \in \operatorname{Im} T$ een lineaire combinatie is van $\mathcal{B}$. We concluderen dat $\mathcal{B}$ een basis is van $\operatorname{Im} T$.

Tenslotte hebben we k en r zo gekozen dat $\dim V = k + r$ en $\dim \operatorname{Ker} T = k$. Omdat we bewezen hebben dat $\dim \operatorname{Im} T = r$, volgt het gestelde. $\square$

Uit deze stelling kunnen we een paar conclusies trekken. In de eerste plaats volgt voor iedere lineaire afbeelding $T: V \rightarrow W$ dat $\dim \operatorname{Im} T \leq \dim V$. In het bijzonder volgt dat als T surjectief is, dan is $\dim W \leq \dim V$. Wat betekenen deze ongelijkheden voor een matrixtransformatie (dat wil zeggen een transformatie $T_M: K^n \rightarrow K^m$ gegeven door $T_M(x) = Mx$ met M een $(m \times n)$ -matrix)?

Opgaven voor §I.4.

- (1) Zij V en W vectorruimten over $\mathbb{C}$, en zij $F: V \rightarrow W$ een lineaire afbeelding met $\text{Ker } F = \{0\}$. Bewijs dat als $v_1, \dots, v_n$ lineair onafhankelijk zijn in V , dan ook $Fv_1, \dots, Fv_n$.
- (2) Zij V en W vectorruimten over $\mathbb{C}$, en zij $F: V \rightarrow W$ een lineaire afbeelding. Stel dat $\dim V = \dim W < \infty$ en dat F surjectief is. Bewijs dat $\text{Ker } F = \{0\}$.
- (3) Kies $x \in \mathbb{R}^2$ zo dat $x \neq (0, 0)$. Zij $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineair zó, dat $Fx = (0, 0)$ en F niet de nulafbeelding. Bewijs dat $\text{Im } F$ een rechte lijn is.
- (4) Zij $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de lineaire afbeelding waarvan de matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

is. Bepaal $\text{Im } F$ en $\text{Ker } F$.

- (5) Bewijs dat voor een lineaire afbeelding $F: V \rightarrow V$ geldt dat $F^2 = 0$ als en alleen als $\text{Im } F \subset \text{Ker } F$.
- (6) Zij V een eindig dimensionale vectorruimte over $\mathbb{C}$ en zij $T: V \rightarrow V$ een operator met $\dim \text{Im } T = \dim \text{Im } T^2$.
 - a. Bewijs dat $\dim \text{Ker } T = \dim \text{Ker } T^2$.
 - b. Bewijs dat $\text{Ker } T = \text{Ker } T^2$.
 - c. Bewijs dat $\text{Im } T \cap \text{Ker } T = \{0\}$
(dit onderdeel heeft niets te maken met a. en b.).
- (7) Zij V een eindig dimensionale vectorruimte over $\mathbb{C}$ en zij $S, T: V \rightarrow V$ operatoren met de volgende eigenschappen
 - (1) $\dim \text{Im } S = \dim \text{Im } S^2$;
 - (2) $\dim \text{Im } T = \dim \text{Im } T^2$;
 - (3) $S \circ T = T \circ S$.
 Bewijs dat $\text{Im } S \circ T \subset \text{Im } (T \circ S)^2$.

HOOFDSTUK II

Bijzondere soorten operatoren

In dit hoofdstuk bekijken we een paar klassen van speciale operatoren op unitaire en euclidische ruimten. Het uiteindelijke hoogtepunt zal het bewijs van de Spectraalstelling voor complexe en reële zelfgeadjungeerde operatoren zijn. Zie [Lay, pagina 446] waar deze stelling zonder bewijs wordt vermeld. Op de weg daarheen ontmoeten we operatoren die in die stelling op de voor- of achtergrond optreden, maar die ieder voor zich ook een eigen rol binnen de wiskunde spelen. Voor veel van de behandelde klassen van operatoren is in het boek van Lay al een reële tegenhanger te vinden.

II.1. Functionalen

Een

- *functionaal*

op de vectorruimte V over het lichaam K is een lineaire afbeelding $f: V \rightarrow K$.

Voorbeeld II.1.1. Zij $V = \mathbb{C}^n$ en $L_w: V \rightarrow \mathbb{C}$ gegeven door $L_w(v) = \langle v, w \rangle$, waarbij w een vaste vector is in V . Dan is L_w een functionaal op V . Dit volgt direct uit de eigenschappen HP1 en HP2 van een Hermitisch product. $\square$

Voorbeeld II.1.2. Zij $C(-1, 1)$ de ruimte van alle reële continue functies op het interval $(-1, 1)$. Zij $L: C(-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $L(f) = f(0)$. Dus aan iedere functie op $(-1, 1)$ wordt zijn waarde in het punt 0 toegevoegd. Dit is een functionaal omdat de waarde in 0 van de som van twee functies per definitie de som van de waarden in nul is van ieder van de functies afzonderlijk. In formule: $(f + g)(0) = f(0) + g(0)$. Voor het scalaire product geldt dat de waarde in nul van een veelvoud van een functie hetzelfde veelvoud is van de waarde in nul van de functie. In formule: $(\alpha f)(0) = \alpha(f(0))$. Dit wil zeggen dat L lineair is. $\square$

Voorbeeld II.1.3. Zij $V = \mathbb{C}^n$ en $\bar{L}_w: V \rightarrow \mathbb{C}$ gegeven door $\bar{L}_w(v) = \langle w, v \rangle$. De functie $\bar{L}_w$ is geen functionaal. Immers, $\bar{L}_w(iv) = -i\bar{L}_w(v)$ en dit laat zien dat $\bar{L}_w$ niet lineair is. $\square$

Voorbeeld II.1.4. Zij $L: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ gegeven door

$$(II.1.1) \quad L(x) = ix_1 + 2x_2 - ix_3.$$

Dan is L een functionaal op $\mathbb{C}^3$. Verder kan L in termen van het standaard inproduct op $\mathbb{C}^3$ als volgt worden beschreven:

$$(\forall x \in \mathbb{C}^3) \quad (L(x) = \langle x, y \rangle),$$

waarbij $y = (-i, 2, i)$. Dus L heeft de vorm van Voorbeeld II.1.1. Uit (II.1.1) zien we dat y de vector is die loodrecht staat op iedere x waarvoor $L(x) = 0$. Je kunt dus zeggen dat y de normaal is op de niveaувlakken van L , dat wil zeggen de normaal op de verzamelingen $\{x \in V \mid L(x) = \alpha\}, \alpha \in \mathbb{C}$. $\square$

De volgende stelling zegt dat Voorbeeld II.1.1 in feite alle functionalen beschrijft.

Stelling II.1.5. *Zij V een unitaire ruimte en $L: V \rightarrow \mathbb{C}$ een functionaal. Dan is er een unieke $y \in V$ zó dat $L(x) = \langle x, y \rangle$ voor iedere x in V .*

BEWIJS. Zij $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ een orthonormale basis voor V (Stelling I.3.14). Dan geldt voor willekeurige $x \in V$ dat

$$x = \sum_{i=1}^n \langle x, v_i \rangle v_i$$

(Lemma I.3.10) en dus uit de lineairiteit van L dat

$$L(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, v_i \rangle L(v_i) = \sum_{i=1}^n \langle x, \overline{L(v_i)} v_i \rangle = \langle x, \sum_{i=1}^n \overline{L(v_i)} v_i \rangle.$$

Met andere woorden, de vector $y = \sum_{i=1}^n \overline{L(v_i)} v_i$ is zoals gewenst.

We tonen verder nog aan dat y uniek is. Stel dat $\langle x, y \rangle = \langle x, z \rangle$ voor iedere $x \in V$. Dan is $y = z$, omdat $\langle \cdot, \cdot \rangle$ niet gedegeneerd is. $\square$

Opmerking II.1.6. In het bewijs van bovenstaande stelling werd een willekeurige orthonormale basis $\mathcal{V}$ voor V gekozen om de bijzondere vector y te construeren. In het algemeen zijn verschillende keuzen van $\mathcal{V}$ mogelijk (verander bijvoorbeeld de volgorde van de elementen van $\mathcal{V}$). Uit de uniciteit van y blijkt dat de speciale keuze van $\mathcal{V}$ er niet toe doet: het proces in het bewijs van de stelling leidt altijd tot dezelfde vector.

Opgaven voor §II.1.

- (1) Zij $V = \mathbb{R}^3$ met het standaard i.p. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en definieer $L: V \rightarrow \mathbb{R}$ door $Lx = x_1 - x_2 + 2x_3$. Welke vector v heeft de eigenschap dat $Lx = \langle x, v \rangle$ voor iedere x ?
- (2) Zij V de vectorruimte van de polynomen van de graad ten hoogste drie over de complexe getallen met het inwendig product $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)\overline{q(t)}dt$.
- Zij de functionaal F op V gegeven door $F(p) = p(0)$ voor iedere $p \in V$. Bepaal $q \in V$ zò, dat $F(p) = \langle p, q \rangle$ voor iedere $p \in V$.
 - Zij de functionaal G op V gegeven door $G(p) = p'(1)$ voor iedere $p \in V$. Bepaal een $q \in V$ zò, dat $G(p) = \langle p, q \rangle$ voor iedere $p \in V$.

- (3) Zij

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

en $L: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ gedefinieerd door $Lv = (Av)_2$, waarbij $(Av)_2$ het tweede kental is van de vector Av . Toon aan dat L een functionaal is en bepaal een vector w zò, dat $L = L_w$ (dat wil zeggen $Lv = \langle v, w \rangle$ voor elke $v \in \mathbb{C}^3$).

- (4) Zij V en W vectorruimten en zij $T: V \rightarrow W$ een operator. Zij $\dim \operatorname{Im} T = k$. Toon aan dat er vectoren $w_1, \dots, w_k$ in W en functionalen $L_1, \dots, L_k$ op V bestaan zò, dat

$$T(v) = \sum_{i=1}^k L_i(v)w_i.$$

- (5) Laat $m, n, k \in \mathbb{N}$.
- Zij A een reële $(m \times n)$ -matrix van rang k . Toon aan dat er vectoren $u_1, \dots, u_k$ in $\mathbb{R}^n$ en $\ell_1, \dots, \ell_k$ in $\mathbb{R}^m$ zijn zò, dat voor iedere x geldt $Ax = \sum_{i=1}^k u_i^T x \ell_i$.
 - Zij V en W unitaire ruimten en zij $T: V \rightarrow W$ een operator. Zij $\dim \operatorname{Im} T = k$. Toon aan dat er vectoren $v_1, \dots, v_k$ in V en $w_1, \dots, w_k$ in W zò, dat $T(v) = \sum_{i=1}^k \langle v, v_i \rangle w_i$.

II.2. De geadjungeerde van een lineaire afbeelding

In deze paragraaf zullen we zien dat elke matrix (lineaire afbeelding) een bevriende matrix (lineaire afbeelding) heeft met bepaalde interessante kenmerken. In de reële situatie komt het gewoon neer op de gespiegelde van een matrix [Lay, pagina 106].

De geadjungeerde

We beginnen met een illustratief voorbeeld.

Voorbeeld II.2.1. Zij $A = (a_{ij})_{i=1,j=1}^{m,n}$ een complexe $(m \times n)$ -matrix. Voor het standaard inwendige product $\langle \cdot, \cdot \rangle_m$ op $\mathbb{C}^m$ bekijken we voor $x = (x_1, \dots, x_n)$ en $y = (y_1, \dots, y_m)$ het product $\langle Ax, y \rangle_m$. Het volgt eenvoudig dat

$$\langle Ax, y \rangle_m = \left\langle \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right)_{i=1}^m, y \right\rangle_m = \sum_{i=1}^m \overline{y_i} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) = \sum_{j=1}^n \overline{\left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \right)} x_j.$$

Zij de matrix B gegeven door $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$ voor $i = 1, \dots, m$ en $j = 1, \dots, n$. Met andere woorden, B is de gespiegelde van de complex geconjugeerde van A . We noemen B de

- *geadjungeerde matrix*

van A : notatie A^* . (Engels: adjoint en wel te onderscheiden van adjungate, zie Lay §3.3.) Voor A^* vinden we dus voor iedere x en y dat

$$\langle Ax, y \rangle_m = \sum_{j=1}^n \overline{\left(\sum_{i=1}^m b_{ji} y_i \right)} x_j,$$

met andere woorden,

$$(II.2.1) \quad \langle Ax, y \rangle_m = \langle x, A^* y \rangle_n.$$

Hierbij is uiteraard $\langle \cdot, \cdot \rangle_n$ het standaard i.p. op $\mathbb{C}^n$. □

Voorbeeld II.2.2. De geadjungeerde van de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 1-2i \\ 1 & 1-3i \\ -1 & 2i \end{bmatrix}$$

is

$$A^* = \begin{bmatrix} 1-i & 1 & -1 \\ 1+2i & 1+3i & -2i \end{bmatrix}.$$

□

Een matrix A met de eigenschap dat $A = A^*$ heet

- *Hermitisch*,

of ook wel

- *zelfgeadjungeerd*.

In het bijzonder is iedere reële symmetrische matrix zelfgeadjungeerd.

Voorbeeld II.2.3. De matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & i & 2-3i \\ -i & 2 & 2+i\sqrt{2} \\ 2+3i & 2-i\sqrt{2} & 3 \end{bmatrix}$$

zijn zelfgeadjungeerd. De matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} i & 1+i \\ 1-i & 2 \end{bmatrix},$$

zijn niet zelfgeadjungeerd. $\square$

De vraag rijst of A^* de enige matrix is met de eigenschap in (II.2.1). We zullen zien dat wat we in Voorbeeld II.2.1 voor matrices en het standaard inwendig product deden ook algemener voor lineaire afbeeldingen en i.p.ruimten kan worden gedaan. Tevens lossen we de bovengestelde vraag op.

Stelling II.2.4. *Zij W een eindig-dimensionale vektorruimte met Hermitisch product $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ en V een unitaire ruimte met Hermitisch product $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$. Voor iedere lineaire afbeelding $A: V \rightarrow W$ bestaat er een unieke lineaire afbeelding $B: W \rightarrow V$ zò, dat voor alle $v \in V$ en $w \in W$ de volgende gelijkheid geldt:*

$$(II.2.2) \quad \langle Av, w \rangle_W = \langle v, Bw \rangle_V.$$

BEWIJS. Zij $w \in W$. We definiëren de afbeelding $S_w: V \rightarrow \mathbb{C}$ door $S_w(v) = \langle Av, w \rangle_W$. Dan is S_w een fuctionaal, zoals eenvoudig is na te gaan. Volgens Stelling II.1.5 is er dan een unieke vector w' in V zó, dat $\langle Av, w \rangle_W = S_w(v) = \langle v, w' \rangle_V$ voor iedere $v \in V$. Definieer nu $B(w) = w'$. Door dit voor iedere $w \in W$ te doen is $B: W \rightarrow V$ een afbeelding. Dus B is een functie met

$$\langle Av, w \rangle_W = \langle v, Bw \rangle_V.$$

Nu nog bewijzen dat B lineair is. Kies daartoe $v \in V$, $w_0, w_1 \in W$ en $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ willekeurig. We berekenen dat enerzijds

$$\begin{aligned} \langle Av, \lambda w_0 + \mu w_1 \rangle_W &= \bar{\lambda} \langle Av, w_0 \rangle_W + \bar{\mu} \langle Av, w_1 \rangle_W \\ &= \bar{\lambda} \langle v, Bw_0 \rangle_V + \bar{\mu} \langle v, Bw_1 \rangle_V \\ &= \langle v, \lambda Bw_0 + \mu Bw_1 \rangle_V, \end{aligned}$$

en anderzijds dat

$$\langle Av, \lambda w_0 + \mu w_1 \rangle_W = \langle v, B(\lambda w_0 + \mu w_1) \rangle_V.$$

Daar $(\lambda w_0 + \mu w_1)'$ uniek is, volgt

$$(\lambda w_0 + \mu w_1)' = \lambda Bw_0 + \mu Bw_1.$$

Dus

$$B(\lambda w_0 + \mu w_1) = \lambda B(w_0) + \mu B(w_1),$$

i.e. B is lineair.

We bewijzen nu dat B uniek is. Veronderstel dat er een C is die dezelfde functionaal definieert. Dan is $\langle v, Bw \rangle_V = \langle v, Cw \rangle_V$ voor alle $v \in V$ en $w \in W$. Dan volgt dat $Bw = Cw$ voor alle $w \in W$, omdat $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ niet gedegenerereerd is. We concluderen dat de afbeelding B uniek is. $\square$

Definitie II.2.5. Als V, W en A, B zijn zoals in Stelling II.2.4, dan heet de afbeelding B de *geadjungeerde* of *Hermitisch toegevoegde* van de afbeelding A en schrijven we $A^* = B$.

Let erop, dat A^* niet alleen door A wordt bepaald, maar ook door de keuze van de beide Hermitische producten.

Voorbeeld II.2.6. Zij $T: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ de afbeelding gegeven door $T(x) = Ax$, met A een complexe $(m \times n)$ -matrix. Uit Voorbeeld II.2.1 zien we dat dan de geadjungeerde afbeelding T^* gegeven wordt door $T^*(y) = A^*y$, waarbij A^* de geadjungeerde is van de matrix A . $\square$

Definitie II.2.7. Zij V een unitaire ruimte. Een operator $A: V \rightarrow V$ heet *zelfgeadjungeerd* of *Hermitisch* als $A^* = A$.

Uit de uniciteit van de geadjungeerde volgt dat A zelfgeadjungeerd is als en alleen als $\langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle$ voor alle $v, w \in V$.

Voorbeeld II.2.8. Zij $T: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ de afbeelding gegeven door $T(x) = Ax$. Uit Voorbeeld II.2.1 zien we dat de geadjungeerde afbeelding T^* gegeven wordt door $T^*(y) = A^*y$, waarbij A^* de geadjungeerde is van de matrix A . Dan is dus T zelfgeadjungeerd als en alleen als de matrix A van T ten opzichte van de standaardbasis de eigenschap heeft dat $A = A^*$. $\square$

Matrices en lineaire afbeeldingen

Het verband tussen de geadjungeerde van een operator en de geadjungeerde van een matrix dat we in Voorbeeld II.2.8 zijn tegengekomen kan algemener worden gegeven.

Stelling II.2.9. Zij $\mathcal{B}$ een orthonormale basis van de unitaire ruimte V en $\mathcal{E}$ een orthonormale basis van de unitaire ruimte W . Zij $T: V \rightarrow W$ lineair. Dan is de matrix $[T^*]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}$ de geadjungeerde van de matrix $[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}$.

BEWIJS. Zij $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ en $\mathcal{E} = \{w_1, \dots, w_m\}$. Zij $[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = (\lambda_{ij})_{i=1, j=1}^{m, n}$ en $[T^*]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = (\mu_{ji})_{j=1, i=1}^{n, m}$. We weten $\lambda_{ij} = \langle T(v_j), w_i \rangle_W$ en $\mu_{ji} = \langle T^*(w_i), v_j \rangle_V$ (Lemma I.3.15, hier gebruiken we dat de bases orthonormaal zijn). Gebruik nu dat

$$\langle T(v_j), w_i \rangle_W = \langle v_j, T^*(w_i) \rangle_V = \overline{\langle T^*(w_i), v_j \rangle_V},$$

om te besluiten dat $\lambda_{ij} = \overline{\mu_{ji}}$. $\square$

Gevolg II.2.10. *Zij V een unitaire ruimte met een orthonormale basis $\mathcal{B}$. Voor een lineaire afbeelding $T: V \rightarrow V$ zijn de volgende uitspraken gelijkwaardig:*

- (1) *T is een zelfgeadjungeerde operator;*
- (2) *$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ is een zelfgeadjungeerde matrix.*

BEWIJS. Als T is een zelfgeadjungeerde operator is dan volgt (2) direct uit Stelling II.2.9. Omgekeerd, als de matrix van T ten opzichte van de basis $\mathcal{B}$ zelfgeadjungeerd is, dan hebben T en T^* dezelfde matrix ten opzichte van de basis $\mathcal{B}$. Dus volgt dat $T = T^*$. $\square$

Opmerking II.2.11. In Stelling II.2.9 en Gevolg II.2.10 is het essentieel dat de basis orthonormaal is. Immers, zij $V = \mathbb{R}^2$ met het standaard inwendig product. Zij $\mathcal{E}$ de standaard basis van V en zij $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 2)\}$. We definiëren $T: V \rightarrow V$ door $T(x, y) = (y, x)$. Dan is T een lineaire afbeelding. Verder

$$\left\langle T \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix} \right\rangle = \beta\gamma + \alpha\delta, \quad \left\langle \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, T \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix} \right\rangle = \alpha\delta + \beta\gamma,$$

voor alle $(\alpha, \beta), (\gamma, \delta) \in V$. Dus T is zelfgeadjungeerd. Het is eenvoudig na te gaan dat

$$[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zoals voorspeld is $[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$ zelfgeadjungeerd. Daar $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ niet zelfgeadjungeerd is, en $T = T^*$, is $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ niet de geadjungeerde van $[T^*]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$. Merk overigens op dat de basis $\mathcal{B}$ wel orthogonaal is. $\square$

Rekenregels

We vervolgen met enige handige rekenregels voor de geadjungeerde van een lineaire afbeelding/operator.

Stelling II.2.12. *Voor een unitaire ruimte V , lineaire afbeeldingen $S, T: V \rightarrow V$ en een complex getal $\lambda \in \mathbb{C}$, gelden de volgende identiteiten:*

$$\begin{aligned} (S + T)^* &= S^* + T^*, \\ (S \circ T)^* &= T^* \circ S^*, \\ (\lambda T)^* &= T^* \overline{\lambda}, \\ T^{**} &= T. \end{aligned}$$

BEWIJS. We bewijzen alleen $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$. De andere identiteiten zijn op ongeveer dezelfde manier te bewijzen. Kies $v, w \in V$ willekeurig. Dan

$$\langle (S \circ T)(v), w \rangle = \langle T(v), S^*(w) \rangle = \langle v, T^*(S^*(w)) \rangle = \langle v, (T^* \circ S^*)(w) \rangle.$$

Per definitie betekent dit dat $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$. $\square$

Opmerking II.2.13. De geadjungeerde van een matrix is de complex geconjugeerde en gespiegelde van de matrix. Daarom geldt voor matrices heel eenvoudig dat

$$\begin{aligned}(A + B)^* &= A^* + B^*, \\ (AB)^* &= B^* A^*, \\ (\lambda A)^* &= A^* \bar{\lambda}, \\ A^{**} &= A.\end{aligned}$$

Stelling II.2.12 kan ook worden bewezen met behulp van Stelling II.2.9 en de rekenregels hierboven voor de geadjungeerde van een matrix. Omgekeerd kunnen we de die rekenregels voor matrices ook afleiden uit de Stellingen II.2.9 en II.2.12. $\square$

Over het reële geval

Voor een euclidische ruimte verandert er nauwelijks iets aan de stellingen en bewijzen in deze paragraaf. Omdat het nemen van de complex geconjugeerde in een reële vectorruimte overbodig is, kunnen we T^* vervangen door T^T , de gespiegelde van T . Een operator T heet

- *symmetrisch*

als $T = T^T$. Een voorbeeld: Gevolg II.2.10 wordt

Gevolg II.2.14. *Zij V een euclidische ruimte met een orthonormale basis $\mathcal{B}$. Voor een lineaire afbeelding $T: V \rightarrow V$ zijn de volgende uitspraken gelijkwaardig:*

- (1) *T is een symmetrische operator;*
- (2) *$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ is een symmetrische matrix.*

Opgaven voor §II.2.

- (1) Bepaal de geadjungeerden van de volgende matrices.
- $A = \begin{bmatrix} i & 1+i & 1-i \\ 2 & 1-i & 1+i \end{bmatrix}.$
 - $A = \begin{bmatrix} i & 1-i \\ 1+i & 2i \end{bmatrix}.$
 - $A = \begin{bmatrix} i & 1-i \\ 1+i & 2 \end{bmatrix}.$
- (2) Zij $T: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ gegeven door $T(x) = \langle x, v \rangle w$, waarbij v en w gegeven vaste vectoren zijn.
- Bepaal de geadjungeerde van de operator T .
 - Bepaal de matrices van T en T^* ten opzichte van de standaard bases.
- (3) Zij V een unitaire ruimte en $T: V \rightarrow V$ een lineaire operator. gegeven door $T(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, v_i \rangle w_i$, waarbij $v_1, \dots, v_n$ en $w_1, \dots, w_n$ vectoren in V zijn.
- Bepaal de geadjungeerde van T .
 - Zij $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_k\}$ een orthonormale basis van V . Bepaal de matrices van T en T^* ten opzichte van $\mathcal{B}$.
- (4) Zij V de ruimte van alle polynomen met complexe coëfficiënten en het inwendige product $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt$.
- Is de vermenigvuldigingsoperator T gedefinieerd door

$$(Tf)(t) = t \cdot f(t)$$

Hermitisch?

- Is de differentiatieoperator D gedefinieerd door $(Df)(t) = f'(t)$ Hermitisch?

- (5) Zij $V = \mathbb{C}^3$ en zij de basis $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$. Van de operator T weten we dat de matrix ten opzichte van de basis $\mathcal{B}$ gegeven wordt door

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Is de operator A Hermitisch?

- (6) Zij V de ruimte van de reële polynomen van de graad ten hoogste 1 met het inwendige product $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Definieer de operator $F: V \rightarrow V$ door $(Fp)(x) = p(1-x)$. Toon aan dat F een symmetrische operator is.

- (7) Zij A een complexe $(m \times n)$ -matrix. Toon dat A^*A en AA^* Hermitische matrices zijn. Laat nu $m = n$. Bewijs dat A inverteerbaar is als en alleen als A^*A inverteerbaar is.
- (8) Zij V een unitaire ruimte en $T: V \rightarrow V$ een operator. Bewijs dat als T inverteerbaar en Hermitisch is, dan is ook T^{-1} Hermitisch.
- (9) Zij V een unitaire ruimte. Een operator $T: V \rightarrow V$ heet
- *scheef Hermitisch*
als $T^* = -T$. Bewijs dat voor een scheef-Hermitische operator geldt $\operatorname{Re} \langle Tv, v \rangle = 0$ voor alle $v \in V$. Geef een voorbeeld van een scheef Hermitische operator T op $\mathbb{C}^2$ en een $v \in \mathbb{C}^2$ met $\langle Tv, v \rangle \neq 0$.
- (10) In de vectorruimte $\mathbb{P}_\infty$ van de polynomen met complexe coëfficiënten noteren we $p_i(x) = x^i$ voor $i = 0, 1, 2, 3, \dots$. De deelruimten V en W van $\mathbb{P}_\infty$ zijn
- $$V = \operatorname{span}\{p_1, p_2, p_3\}, \quad W = \operatorname{span}\{p_1, p_2\}.$$
- Het inwendige product wordt gegeven door $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t) \overline{g(t)} dt$. Merk op dat $\{p_1, p_2\}$ een orthogonale basis is van W .
- a. Bepaal een orthogonale basis van V .
 - b. De operator T op W wordt gedefinieerd door $(Tf)(t) = t^2 \cdot f''(t)$. Is T Hermitisch?
- (11) Zij V een unitaire ruimte en $A: V \rightarrow V$ een Hermitische operator. Toon aan dat de eigenruimten van A bij de eigenwaarden λ_1 en λ_2 met $\lambda_1 \neq \overline{\lambda_2}$ onderling loodrecht zijn.
- (12) Zij V een unitaire ruimte en zij $T: V \rightarrow V$ zodat $T = -T^*$. Toon aan dat iedere eigenwaarde van T zuiver imaginair is. (D.w.z. het reële deel is nul.)
- (13) Zij T een operator op een unitaire ruimte met de eigenschap dat $T^* \circ T = T \circ T^*$. Toon aan dat $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^*$.
- (14) Zij T een Hermitische operator op de unitaire ruimte V , en zij $v \in V$.
- a. Toon dat $T^2 v = 0$ impliceert $Tv = 0$.
 - b. Toon dat $T^3 v = 0$ impliceert $Tv = 0$.
 - c. Toon aan dat voor ieder natuurlijk getal n geldt $\operatorname{Ker} T^n = \operatorname{Ker} T$.
- (15) Zij T een Hermitische operator op de unitaire ruimte V .
- a. Toon dat $T^n = 0$ als en alleen als $T = 0$.
 - b. Geef een voorbeeld van een lineaire afbeelding S op een vectorruimte V met de eigenschappen $S^2 = 0$ en $S \neq 0$.

II.3. Projecties en directe sommen

Deze paragraaf is een opstapje voor de volgende. Het gaat hier over projecties en directe sommen. Inproducten worden in de volgende paragraaf in de beschouwingen betrokken. Als voorbereiding op deze en de volgende paragraaf, zie [Lay, §6.2].

Directe sommen

Zij H en G deelruimten van de vectorruimte V over het lichaam K . De

- *som* van H en G

bestaat uit alle vectoren $v \in V$ die te schrijven zijn als $v = h + g$ met $h \in H$ en $g \in G$. We schrijven dan $H + G$ voor de som van H en G . Het is gemakkelijk in te zien dat $H + G$ een lineaire deelruimte van V is.

Verder is V de

- *directe som* van H en G

als iedere $v \in V$ op precies één manier te schrijven is als $v = h + g$ met $h \in H$ en $g \in G$. We schrijven dan $V = H \oplus G$.

Lemma II.3.1. *Zij H en G deelruimten van de vectorruimte V over het lichaam K . Dan $V = H \oplus G$ als en alleen als $V = H + G$ en $H \cap G = \{0\}$.*

BEWIJS. Als $V = H \oplus G$ en $v \in H \cap G$ dan kunnen we v op twee manieren als volgt schrijven:

$$v = \begin{Bmatrix} v \\ \in H \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \in G \end{Bmatrix}.$$

We hebben nu twee schrijfwijzen gevonden en omdat die hetzelfde moeten zijn volgt dat $v = 0$. De conclusie is: als $V = H \oplus G$, dan $H \cap G = \{0\}$.

Omgekeerd, stel $V = H + G$ en $H \cap G = \{0\}$. Iedere $v \in V$ is te schrijven als $v = h + g$. Als $v = h_1 + g_1 = h_2 + g_2$, dan $h_1 - h_2 = g_2 - g_1$. Daar $h_1 - h_2 \in H$ en $g_2 - g_1 \in G$ volgt dat $h_1 - h_2 = g_2 - g_1 \in G \cap H$. Daarom $h_1 - h_2 = g_2 - g_1 = 0$, en dus $h_1 = h_2$ en $g_2 = g_1$. We zien dat $V = H \oplus G$. $\square$

Merk op dat als $V = H \oplus G$, dan ook $V = G \oplus H$.

Voorbeeld II.3.2. Neem $V = \mathbb{C}^3$ en

$$H = \text{span}\{(1, 1, 1)\}, \quad G = \text{span}\{(1, 0, 1), (1, 0, 0)\}.$$

We bewijzen dat $V = H \oplus G$. Kies een willekeurige $x \in V$. Dan $x = \alpha(1, 1, 1) + \beta(1, 0, 1) + \gamma(1, 0, 0)$ voor geschikte getallen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$. (Ga na!) Zij $h = \alpha(1, 1, 1)$ en $g = \beta(1, 0, 1) + \gamma(1, 0, 0)$. We zien dat $x = h + g$. Conclusie: $V = H + G$.

Als $x \in H \cap G$, dan bestaan α, β en $\gamma \in \mathbb{C}$ met $x = \alpha(1, 1, 1) = \beta(1, 0, 1) + \gamma(1, 0, 0)$. Dus $\alpha(1, 1, 1) - \beta(1, 0, 1) - \gamma(1, 0, 0) = 0$. Het is eenvoudig na te rekenen dat $\alpha = 0$, dus $x = 0$.

We concluderen dat $V = G \oplus H$. $\square$

Lemma II.3.3. *Zij H en G deelruimten van de vectorruimte V . Dan geldt:*

$$\dim(H + G) = \dim H + \dim G - \dim(H \cap G).$$

BEWIJS. Dit bewijs lijkt erg op het bewijs van de Rangstelling I.4.1.

Omdat $W = H + G$ een lineaire deelruimte is van V kunnen we zonder verlies der algemeenheid onderstellen dat $W = V$. Als H oneindig dimensionaal is dat geldt hetzelfde voor V en valt er dus niets te bewijzen. Onderstel derhalve dat zowel H als G eindig dimensionaal zijn. Dan is $H \cap G$ ook eindig dimensionaal. Laat $\mathcal{D} = \{v_1, \dots, v_n\}$ een basis zijn voor $H \cap G$. We vullen het onafhankelijke stelsel $\mathcal{D}$ aan tot een basis

$$\mathcal{H} = \{h_1, \dots, h_k, v_1, \dots, v_n\}$$

van H ([Lay, Theorem 11 op pagina 253]), en een basis

$$\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_m, v_1, \dots, v_n\}$$

van G . We beweren dat

$$\mathcal{V} = \{h_1, \dots, h_k, v_1, \dots, v_n, g_1, \dots, g_m\}$$

een basis is van V . Als dat zo is dan volgt

$$\begin{aligned} \dim H + G &= \dim V = k + n + m = (k + n) + (m + n) - n \\ &= \dim H + \dim G - \dim(H \cap G), \end{aligned}$$

hetgeen is zoals gewenst.

Neem een willekeurige vector $x \in V$, en schrijf x als $x = h + g$ voor zekere $h \in H$ en $g \in G$. Omdat $\mathcal{H}$ een basis is van H kunnen we h schrijven in de vorm $h = \sum_{i=1}^k \alpha_i h_i + \sum_{j=1}^n \beta_j v_j$ voor zekere scalaires α_i en β_j . Analoog kunnen we g schrijven in de vorm $g = \sum_{i=1}^m \gamma_i g_i + \sum_{j=1}^n \delta_j v_j$. Maar dan volgt dat

$$x = h + g = \sum_{i=1}^k \alpha_i h_i + \sum_{i=1}^m \gamma_i g_i + \sum_{j=1}^n (\beta_j + \delta_j) v_j,$$

hetgeen bewijst dat x een lineaire combinatie is van de elementen van $\mathcal{V}$. Er blijft over te bewijzen dat $\mathcal{V}$ lineair onafhankelijk is. Stel dat $\sum_{i=1}^k \alpha_i h_i + \sum_{j=1}^m \beta_j g_j + \sum_{k=1}^n \gamma_k v_k = 0$. Dan geldt

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i h_i = - \sum_{j=1}^m \beta_j g_j - \sum_{k=1}^n \gamma_k v_k \in H \cap G.$$

Vanwege de lineaire onafhankelijkheid van $\mathcal{H}$ kan dit alleen maar als elke $\alpha_i = 0$. Etc. $\square$

Gevolg II.3.4. Als $V = H \oplus G$ dan $\dim V = \dim H + \dim G$.

Projecties

Zij $V = G \oplus H$. Voor iedere v in V zijn er unieke h in H en g in G zodat $v = h + g$. Daarom kunnen we de afbeelding $P: V \rightarrow V$ definiëren door $P(v) = h$. Die afbeelding heet

- de projectie van V op H langs G .

Lemma II.3.5. Zij $P: V \rightarrow V$ een projectie van V op H langs G . Dan:

- (1) P is een lineaire afbeelding,
- (2) $\text{Ker } P = G$,
- (3) $\text{Im } P = H$,
- (4) $P^2 = P$.

Omgekeerd, als $P: V \rightarrow V$ een lineaire afbeelding is met $P^2 = P$, dan is P een projectie op $\text{Im } P$ langs $\text{Ker } P$ en in het bijzonder geldt dat $V = \text{Ker } P \oplus \text{Im } P$.

BEWIJS. Om (1) te bewijzen merken we op dat uit $v_1 = h_1 + g_1$ en $v_2 = h_2 + g_2$ volgt dat

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = (\alpha h_1 + \beta h_2) + (\alpha g_1 + \beta g_2).$$

Dus $P(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha h_1 + \beta h_2 = \alpha P v_1 + \beta P v_2$.

Uit $g = 0 + g$ voor $g \in G$ volgt dat $Pg = 0$. Omgekeerd als $Pv = 0$, dan $v = 0 + g \in G$. Dit bewijst (2).

Als $h \in H$, dan $h = 0 + h$ en dus $Ph = h$. Dit bewijst dat $\text{Im } P = H$.

Uit $Pv \in H$ volgt dat $Pv = 0 + Pv$ en dus dat $P(Pv) = Pv$. Daaruit volgt $P^2(v) = P(v)$ voor iedere $v \in V$. We concluderen dat $P^2 = P$.

Blijft het tweede deel van de stelling te bewijzen. Schrijf $I: V \rightarrow V$ voor de identieke afbeelding. Zij $v \in V$. Dan

$$v = (I - P)v + Pv.$$

De vector $(I - P)v$ behoort tot $\text{Ker } P$ omdat $P((I - P)v) = (P - P^2)v = 0$. Bovendien is $Pv \in \text{Im } P$. Dus $V = \text{Ker } P + \text{Im } P$. Zij nu $v \in \text{Ker } P \cap \text{Im } P$. Dan $v = Pw$ omdat $v \in \text{Im } P$ en

$$v = Pw = P^2w = Pv = 0$$

omdat $P^2 = P$ en $v \in \text{Ker } P$. Er volgt dat $V = \text{Ker } P \oplus \text{Im } P$. We besluiten dat P de projectie langs $\text{Ker } P$ op $\text{Im } P$ is. $\square$

Opgaven voor §II.3.

- (1) Bepaal in de volgende gevallen de som van de deelruimten U en W van de vectorruimte V .
- $V = \mathbb{C}^3$, $U = \text{span}\{(i, 0, 1)\}$ en $W = \text{span}\{(1, 0, i)\}$.
 - $V = \mathbb{R}^4$, $U = \text{span}\{(1, 1, 0, 0)\}$ en $W = \text{span}\{(1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)\}$.
 - V is de ruimte van de continue functies op $\mathbb{R}$. De deelruimte U is de ruimte van de functies die nul zijn in -1 en W bestaat uit de functies die nul zijn in 1 .
 - V is de ruimte van de (2×2) -matrices, U bestaat uit de onderdriehoeksmatrices en W bestaat uit de bovendriehoeksmatrices.
- (2) Zij $U = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0\}$ en $V = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 + 3x_3 = 0\}$. Bepaal $\dim(U + V)$.
- (3) In $\mathbb{R}^4$ zij $U = \text{span}\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (5, 4, 5, 4)\}$ en $W = \text{span}\{(1, 2, 1, 2), (2, 2, 2, 1), (1, 8, 1, 8)\}$. Bepaal $\dim U$, $\dim W$, $\dim(U \cap W)$ en $\dim(U + W)$.
- (4) In $\mathbb{R}^4$ zij $U = \text{span}\{(1, 2, 0, 1), (1, 2, 3, 0), (3, 6, 3, 2)\}$ en zij W de nulruimte van de matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

- Bereken $\dim U$, $\dim W$, $\dim(U \cap W)$ en $\dim(U + W)$.
 - Geef van elk van deze vier deelruimten een basis aan.
- (5) In $\mathbb{R}^4$ zij $U = \text{span}\{(1, 0, 1, 2), (0, 1, 1, 2), (2, -1, 1, 2)\}$ en zij W de nulruimte van de matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Bepaal een basis van $U + W$.
 - Bepaal een basis van $U \cap W$.
 - Bepaal een 2-dimensionale ruimte deelruimte V van $\mathbb{R}^4$ zodat $U + V = W + V = \mathbb{R}^4$.
- (6) Ga in de volgende gevallen na of $\mathbb{R}^4 = V \oplus W$.
- $V = \text{span}\{(1, 1, 1, 1), (1, 2, 0, 1)\}$ en W is de nulruimte van de matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

- $V = \text{span}\{(1, 1, 1, 1), (1, 2, 0, 1)\}$ en $W = \text{span}\{(1, 1, 0, 1), (2, 3, -1, 2)\}$.

c. Zij V en W de nulruimtes van respectievelijk

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(7) Zij V eindig dimensionaal en U en W deelruimten met $U \cap W = \{0\}$ en $\dim U + \dim W \geq \dim V$. Bewijs:

- a. $\dim U + \dim W = \dim V$.
- b. $V = U \oplus W$.

(8) Bewijs of weerleg:

- a. Als U , V en W deelruimten zijn van $\mathbb{R}^2$, dan

$$U + (V \cap W) \subset (U + V) \cap (U + W).$$

- b. Als U , V en W deelruimten zijn van $\mathbb{R}^2$, dan

$$U + (V \cap W) \supset (U + V) \cap (U + W).$$

(9) Ga van de volgende matrices na of het projecties zijn en wat de kern en het beeld is.

- a. $P = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$

- b. $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$

- c. $P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

- d. $P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$

- e. $P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$

(10) Zij $P: V \rightarrow V$ projectie met V eindig dimensionaal. Toon aan dat er een basis $\mathcal{B}$ bestaat van V zodat de matrix $[P]_{\mathcal{B}}$ een diagonaalmatrix is. Wat zijn de diagonaalelementen?

(11) Zij P een matrix met $P^2 = P$. Toon aan dat er een matrix S bestaat zodat $D = S^{-1}PS$ een diagonaalmatrix is. Wat weet je van D^2 en wat volgt daar uit voor de diagonaalelementen van de matrix D ?

(12) Zij $P: V \rightarrow V$ een projectie. Bewijs de volgende uitspraken:

- a. $I - P$ is een projectie.
- b. $\text{Ker } P = \text{Im}(I - P)$.

c. $\text{Im } P = \text{Ker } (I - P)$.

- (13) Zij H en G deelruimten van de vectorruimte V . Zij $\mathcal{B}_1$ een basis van H en $\mathcal{B}_2$ een basis van G . Dan $V = H \oplus G$ als en alleen als $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ een basis van V is.

II.4. Orthogonale projecties

In deze paragraaf bewijzen we het bestaan van orthogonale projecties in een willekeurige i.p.ruimte. We maken ondermeer gebruik van de resultaten uit de vorige paragraaf. Zie [Lay, §6.2] als voorbereiding op deze paragraaf.

Orthogonale complementen

Zij S deelverzameling van een i.p.ruimte V . Het

- *orthogonale complement*

van S is de verzameling $S^\perp = \{v \in V \mid \text{voor alle } s \in S : \langle v, s \rangle = 0\}$. Als $S = \{v\}$, dan korten we $\{v\}^\perp$ vaak af tot $v^\perp$.

Voorbeeld II.4.1. Zij $V = \mathbb{C}^3$ en $S = \{e_1, e_2\}$, de eerste twee elementen van de standaard basis van V . Dan is $S^\perp$ de verzameling van alle vectoren die de eerste en tweede coördinaat gelijk aan nul hebben, en dus is $S^\perp$ de verzameling opgespannen door $\{e_3\}$. We zien dat $S^\perp$ een lineaire deelruimte is. $\square$

Lemma II.4.2. *Zij S een deelverzameling van de i.p.ruimte V over K . Dan is $S^\perp$ een lineaire deelruimte van V .*

BEWIJS. Uit HP3 volgt dat $0 \in S^\perp$. Stel dat $v, w \in S^\perp$, $s \in S$ en $\lambda, \mu \in K$. Dan geldt:

$$\langle \lambda u + \mu v, s \rangle = \lambda \langle u, s \rangle + \mu \langle v, s \rangle = 0 + 0 = 0,$$

en dus $\lambda u + \mu v \in S^\perp$. Dit bewijst dat $S^\perp$ een lineaire deelruimte van V is. $\square$

Stelling II.4.3. *Zij W een lineaire deelruimte van de unitaire ruimte V . Dan:*

- (1) $V = W \oplus W^\perp$,
- (2) $\dim V = \dim W + \dim W^\perp$.

BEWIJS. Kies een orthonormale basis $\{v_1, \dots, v_m\}$ van W en breid die uit tot een orthonormale basis $\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$ van V . (Breid uit tot basis [Lay, Theorem 5.12], en orthonormaliseer met Gram-Schmidt.) Kies $v \in V$. Dan $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ voor zekere $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$. Schrijf $w_1 = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$ en $w_2 = \alpha_{m+1} v_{m+1} + \dots + \alpha_n v_n$. Dan $w_1 \in W$. Bovendien geldt dat $w_2 \perp v_j$ voor $j = 1, \dots, m$ en dus staat w_2 loodrecht op iedere combinatie van $v_1, \dots, v_m$, i.e., $w_2 \in W^\perp$. Dus $V = W + W^\perp$. Maar ook is $W \cap W^\perp = \{0\}$ omdat als $v \in W \cap W^\perp$, dan $\langle v, v \rangle = 0$, dus $v = 0$.

De tweede bewering volgt ogenblikkelijk uit Gevolg II.3.4. $\square$

De orthogonale projectie

Zij W een lineaire deelruimte van de unitaire ruimte V . Uit Stelling II.4.3 volgt dat $V = W \oplus W^\perp$. Zij $P: V \rightarrow W$ de projectie van V op W langs $W^\perp$. Dan heet P de

- *orthogonale projectie op W .*

We zullen enkele interessante eigenschappen van orthogonale projecties afleiden.

Uit Lemma II.3.5 weten we al dat $\text{Ker } P = W^\perp$, $\text{Im } P = W$ en $P^2 = P$. Merk op dat voor elke $v \in V$ geldt

$$P(v - Pv) = Pv - P^2v = Pv - Pv = 0,$$

en dus dat $v - Pv \in \text{Ker } P = W^\perp$.

De vector $v - Pv$ behoort dus tot $W^\perp$. We bewijzen dat Pv door deze eigenschap wordt gekarakteriseerd.

Lemma II.4.4. *Zij W een lineaire deelruimte van de unitaire ruimte V met orthogonale projectie $P: V \rightarrow W$. Voor elke $v \in V$ is Pv de unieke vector b in W met $v - b \in W^\perp$.*

BEWIJS. Stel dat $b \in W$ de eigenschap heeft dat $v - b \in W^\perp$. Dan $v = b + (v - b)$ én $v = Pv + (v - Pv)$. Maar V is de directe som van W en $W^\perp$ (Stelling II.4.3). Beide schrijfwijzen stemmen dus overeen. $\square$

Definitie II.4.5. Zij V een i.p.ruimte, $A \subset V$ en $x \in V$. De *afstand* $d(x, A)$ van x tot A is gedefinieerd door

$$(II.4.1) \quad d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\} = \inf\{\|x - a\| \mid a \in A\}.$$

Het infimum in (II.4.1) hoeft geen minimum te zijn. Bijvoorbeeld, als $V = \mathbb{R}$ met het standaard inwendige product, $x = \pi$ en $A = \mathbb{Q}$, dan $d(x, A) = 0$ en $d(x, q) > 0$ voor iedere $q \in \mathbb{Q}$. Ook als het infimum in (II.4.1) wel een minimum is, dus $d(x, A) = d(x, a)$ voor een zekere $a \in A$, dan nog is a in het algemeen niet uniek. Bijvoorbeeld, als $V = \mathbb{R}$ met het standaard inwendige product, $x = 0$ en $A = \{-1, 1\}$, dan is $d(x, A) = 1$ en $d(x, 1) = d(x, -1) = 1$.

In het volgende resultaat zien we dat deze onprettige verschijnselen zich niet voordoen als A een lineaire deelruimte is.

Lemma II.4.6. *Zij W een lineaire deelruimte van de unitaire ruimte V met orthogonale projectie $P: V \rightarrow W$. Als $v \in V$ dan wordt de afstand van v tot W aangenomen in het punt Pv . In formule:*

$$d(v, W) = d(v, Pv).$$

Bovendien is Pv het unieke punt waarin de afstand tot W wordt aangenomen.

BEWIJS. Kies $w \in W$ met $w \neq Pv$. Beide beweringen volgen als we kunnen laten zien dat $\|v - w\| > \|v - Pv\|$. Aldus:

$$\|v - w\|^2 = \|(v - Pv) + (Pv - w)\|^2 = \|v - Pv\|^2 + \|Pv - w\|^2.$$

Dit volgt uit de Stelling van Pythagoras. Immers, $Pv - w \in W$ (hier gebruiken we dat W een lineaire deelruimte is!) en $v - Pv \in W^\perp$. Daar $w \neq Pv$ volgt $\|Pv - w\| > 0$ en dus dat

$$\|v - w\|^2 > \|v - Pv\|^2,$$

hetgeen is zoals gewenst. $\square$

Voor analoge resultaten zie [Lay, Stelling 9 op pagina 392].

We leiden nu een formule voor de orthogonale projectie af.

Stelling II.4.7. *Zij $\{b_1, \dots, b_m\}$ een orthogonale basis van de lineaire deelruimte H van de unitaire ruimte V , en $P: V \rightarrow H$ de orthogonale projectie op H . Voor elke $x \in V$ geldt de volgende formule:*

$$Px = \sum_{j=1}^m \frac{\langle x, b_j \rangle}{\langle b_j, b_j \rangle} b_j.$$

BEWIJS. Vul $\{b_1, \dots, b_m\}$ aan tot een orthogonale basis $\{b_1, \dots, b_m, b_{m+1}, \dots, b_n\}$ van V (waarom kan dit?). Voor $i \leq m$, zij

$$c_i = \frac{1}{\|b_i\|^2} b_i.$$

Dan geldt

$$x = \sum_{i=1}^n \langle x, c_i \rangle c_i = \sum_{i=1}^m \frac{\langle x, b_i \rangle}{\langle b_i, b_i \rangle} b_i$$

(Lemma I.3.10). Merk nu op dat $b_{m+1}, \dots, b_n \in H^\perp$ en dus geldt voor

$$b = \sum_{i=1}^m \frac{\langle x, b_i \rangle}{\langle b_i, b_i \rangle} b_i,$$

dat $x - b \in H^\perp$. Daarom voldoet b aan de voorwaarde in Lemma II.4.4 en volgt $Px = b$. $\square$

Voor de $\mathbb{R}^n$ met het gewone inwendige product staat in [Lay, Theorem 7 op pagina 394] een soortgelijk resultaat. (Wat is het verschil?)

Stelling II.4.8. *Zij H een lineaire deelruimte van de unitaire ruimte V . De orthogonale projectie P op H heeft de volgende eigenschappen:*

- (1) $\text{Im } P = H$;
- (2) $\text{Ker } P = H^\perp$;
- (3) Als $x \in V$, dan $d(x, Px) = \|x - Px\| = d(x, H)$;
- (4) Als $x \in H$ dan $Px = x$;
- (5) $P^2 = P$;
- (6) Als $x \in V$, dan $x - Px \in H^\perp$;
- (7) $P^* = P$, met andere woorden P is zelfgeadjungeerd.

BEWIJS. De beweringen (1) tot en met (6) werden al eerder bewezen. Voor (7), zij $x, y \in V$. Dan $\langle Px, y - Py \rangle = 0$ en $\langle x - Px, Py \rangle = 0$ omdat $Pv \in H$ en $v - Pv \in H^\perp$ voor iedere $v \in V$. We gebruiken deze twee gelijkheden in de volgende berekening:

$$\langle Px, y \rangle = \langle Px, Py \rangle + \langle Px, y - Py \rangle = \langle Px, Py \rangle = \langle x, Py \rangle - \langle x - Px, Py \rangle = \langle x, Py \rangle.$$

We zien dat $\langle Px, y \rangle = \langle x, Py \rangle$ en dus $P^* = P$. $\square$

Stelling II.4.9. *Zij V een unitaire ruimte. De lineaire afbeelding*

$$P: V \rightarrow V$$

is een orthogonale projectie van V als en alleen als $P^2 = P = P^$.*

BEWIJS. Als P een orthogonale projectie is dan volgt uit Stelling II.4.8 dat $P^2 = P = P^*$.

Omgekeerd, zij $P^2 = P = P^*$. Omdat $P^2 = P$, is P een projectie (Lemma II.3.5). Zij

$$H = \text{Im } P.$$

We bewijzen dat P de orthogonale projectie is van V op H . Het volstaat te bewijzen dat voor elke $x \in V$ geldt $x - Px \in H^\perp$. Immers, als dat zo is dan volgt met Stelling II.4.6 dat Px de orthogonale projectie is van x op H .

Zij $x \in V$. Dan $x - Px \in \text{Ker } P$ omdat $P(x - Px) = Px - P^2x = Px - Px = 0$. We bewijzen dat $\text{Ker } P \subset H^\perp$ en dus dat $x - Px \in H^\perp$, hetgeen is zoals gewenst.

Welnu, zij $z \in \text{Ker } P$. Voor iedere $y \in H$ geldt $\langle y, z \rangle = \langle Py, z \rangle$, want $y = Py$. Maar $\langle Py, z \rangle = \langle y, Pz \rangle$ want $P = P^*$, en dus $\langle y, z \rangle = \langle y, Pz \rangle = \langle y, 0 \rangle = 0$. We concluderen dat $z \in H^\perp$. $\square$

Nog een formule voor de orthogonale projectie

Stel nu dat we in een concrete situatie in een unitaire ruimte de projectie van een punt x op een deelruimte $H \subset V$ moeten uitrekenen. Er zijn verschillende manieren om dat te doen. Als in H een orthogonale basis is gegeven, dan kan Stelling II.4.7 gebruikt worden. Als zo'n basis niet is gegeven, dan moet eerst met het Gram-Schmidt orthogonaliseringsproces een orthogonale basis van H worden bepaald, alvorens Stelling II.4.7 toegepast kan worden. Deze methode is omslachtig. Beter is het Px met de onderstaande directe oplossingsmethode te berekenen.

Gegeven is een deelruimte H van de unitaire ruimte V . Stel dat $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_m\}$ een basis is voor H . Zij $P: V \rightarrow H$ de orthogonale projectie en zij w een willekeurige vector uit V . We willen de vector Pw bepalen. We weten dat $Pw \in H$ en dus een lineaire combinatie is van de basis $\mathcal{V}$, zeg

$$Pw = \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i$$

voor zekere $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C}$. We hebben de vector Pw dus bepaald als we de scalaren α_i hebben bepaald. Om daar goed zicht op te krijgen vertalen we dit in een probleem dat in termen van matrices is gesteld. Over die vertaling gaat de volgende stelling.

Stelling II.4.10. *Zij $H = \text{span}\{v_1, \dots, v_m\}$ een lineaire deelruimte van de unitaire ruimte V . Zij P de orthogonale projectie op H , en zij $w \in V$. Schrijf*

$$(II.4.2) \quad G = \begin{bmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_m, v_1 \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v_1, v_m \rangle & \cdots & \langle v_m, v_m \rangle \end{bmatrix}, \quad b_w = \begin{bmatrix} \langle w, v_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle w, v_m \rangle \end{bmatrix}.$$

Dan:

- (1) $Pw = \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i$ als en alleen als de vector $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ een oplossing is van $Gx = b_w$;
(Merk op dat dit impliceert dat de vergelijking $Gx = b_w$ voor alle stelsels $\{v_1, \dots, v_m\}$ en vectoren w een oplossing heeft.)
- (2) Als $\{v_1, \dots, v_m\}$ lineair onafhankelijk is, dan is G inverteerbaar.

BEWIJS. We bewijzen eerst (1). Zij $u = \sum_{i=1}^m \beta_i v_i$ met $\beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{C}$. Dan $w - u \in H^\perp$ als en alleen als $\langle w - u, v_j \rangle = 0$ voor $j = 1, \dots, m$. Daar

$$\langle w - u, v_j \rangle = \langle w, v_j \rangle - \sum_{i=1}^m \beta_i \langle v_i, v_j \rangle.$$

volgt $w - u \in H^\perp$ als en alleen als $\sum_{i=1}^m \beta_i \langle v_i, v_j \rangle = \langle w, v_j \rangle$ voor $j = 1, \dots, m$. Bovendien $w - u \in H^\perp$ als en alleen als $u = Pw$. We concluderen dat $Pw = \sum_{i=1}^m \beta_i v_i$ als en alleen als de vector $(\beta_1, \dots, \beta_m)$ een oplossing is van het stelsel vergelijkingen

$$\sum_{i=1}^m x_i \langle v_i, v_j \rangle = \langle w, v_j \rangle, \quad j = 1, \dots, m,$$

met andere woorden, van $Gx = b_w$.

Nu (2). Omdat G vierkant is, volstaat het te bewijzen dat $Gx = 0$ slechts de triviale oplossing heeft. Stel daartoe dat $x = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ is een oplossing van $Gx = 0$. Neem nu $w = 0$ in (II.4.2). Dan $b_w = 0$ en dus is x een oplossing van $Gx = b_w$. Dat wil zeggen, $0 = P0 = Pw = \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i$. Daar het stelsel $\{v_1, \dots, v_m\}$ lineair onafhankelijk is, volgt dat $x = 0$. $\square$

We geven nu eerst een voorbeeld waarbij de formule wordt toegepast en daarna leggen we het verband uit met [Lay, Theorem 7.13].

Voorbeeld II.4.11. Zij $V = \mathbb{P}_5$ en

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt,$$

Zij $H = \text{span}\{1, t\}$ en zij P de orthogonale projectie op H . We berekenen voor $f(t) = 2t^3 + 3t^5$ een $p(t)$ in H zó dat $\|f - p\|$ minimaal is. (Bedenk dat voor die p de waarde van $\int_0^1 |f(t) - p(t)|^2 dt$ minimaal is. Het is dus uit H in “oppervlakte” de beste benadering van f .)

Allereerst merken we op dat $\|f - p\|$ minimaal is als en alleen als $d(f, H) = d(f, p)$. Dat is zo als $p = Pf$. We gaan dus berekenen $Pf(t) = \alpha_1 1 + \alpha_2 t$. Dan moet (α_1, α_2) een oplossing zijn van $Gx = b$ met

$$G = \begin{bmatrix} \langle 1, 1 \rangle & \langle t, 1 \rangle \\ \langle 1, t \rangle & \langle t, t \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \langle f, 1 \rangle \\ \langle f, t \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 29/35 \end{bmatrix}.$$

Oplossen van $Gx = b$ levert $\alpha_1 = -\frac{34}{35}$ en $\alpha_2 = \frac{138}{35}$. $\square$

Zij G en b_w gegeven door (II.4.2). Veronderstel nu verder dat G inverteerbaar is. We kunnen dan de vergelijking $Gx = b_w$ oplossen met de regel van Cramer. Als we, zoals gebruikelijk $G_j(b_w)$ schrijven voor de matrix die uit G ontstaat door kolom j te vervangen door b_w , dan vinden we voor het j -de kental van de oplossing

$$\alpha_j = \frac{\det G_j(b_w)}{\det G}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Voor de orthogonale projectie van w op $\text{span}\{v_1, \dots, v_m\}$ vinden we dus

$$(II.4.3) \quad Pw = \frac{1}{\det G} \sum_{j=1}^m (\det G_j(b_w)) v_j.$$

Die formule kan nog op een andere manier geschreven worden. zoals in de volgende stelling gebeurt.

Stelling II.4.12. *Zij $\{v_1, \dots, v_m\}$ een basis van de lineaire deelruimte H van de i.p. ruimte V . Zij P de orthogonale projectie op H , en zij $w \in V$. Schrijf*

$$G = \begin{bmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_m, v_1 \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v_1, v_m \rangle & \cdots & \langle v_m, v_m \rangle \end{bmatrix}.$$

Dan:

$$(II.4.4) \quad Pw = \frac{-1}{\det G} \det \begin{bmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_m, v_1 \rangle & \langle w, v_1 \rangle \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \langle v_1, v_m \rangle & \cdots & \langle v_m, v_m \rangle & \langle w, v_m \rangle \\ v_1 & \cdots & v_m & 0 \end{bmatrix}.$$

De formule (II.4.4) moet geïnterpreteerd worden als de som die ontstaat door ontwikkeling van de determinant naar de laatste rij. Bij ontwikkeling naar die laatste rij gaat de formule over in formule (II.4.3). (Ga dat zelf na.)

Voorbeeld II.4.13 (Vervolg van Voorbeeld II.4.11). De determinant van G is in dit geval $\frac{1}{12}$. De formule voor de projectie van $f(t)$ op $\text{span}\{1, t\}$ wordt dan

$$Pf(t) = -12 \det \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{29}{35} \\ \mathbf{1} & \mathbf{t} & 0 \end{bmatrix}.$$

In dit geval staan $\mathbf{1}$ en $\mathbf{t}$ voor vectoren. Bij het berekenen van de determinant mag je ze net als alle andere elementen van de matrix als getallen behandelen en dus ook naar een geschikte rij of kolom ontwikkelen. $\square$

Opmerking II.4.14. Zij V een unitaire ruimte met lineaire deelruimte H , en laat $P: V \rightarrow H$ de orthogonale projectie zijn. Voor $x \in V$ ligt het punt Px van alle punten in H het dichtst bij x . Je kunt aan de vector Px daarom denken als “de beste benadering van x in H .” Hier komt ook de term “kleinste kwadraten benadering” vandaan. Immers, het minimaliseren van een afstand komt neer op het minimaliseren van een som van kwadraten. Zie ook het volgende voorbeeld. $\square$

Voorbeeld II.4.15. We bekijken nu het speciale geval dat $V = \mathbb{C}^n$ met het standaard inwendige product. Verder nemen we voor $H = \text{Col } A$, de kolomruimte van de matrix A . Dus $H = \text{span}\{a_1, \dots, a_m\}$, waarbij $a_1, \dots, a_m$ de kolommen zijn van A . Zij $P: \mathbb{C}^n \rightarrow H$ de orthogonale projectie op H . We zijn geïnteresseerd in het bepalen van de matrix G uit Stelling II.4.10.

Bedenk nu eerst even dat voor een $(n \times n)$ -matrix B het element op plaats (i, j) wordt gegeven door de formule $\langle Be_j, e_i \rangle$ (let op de volgorde van i en j). Hierbij stellen e_i en e_j de i^e en j^e eenheidsvectoren voor.

Dan berekenen we nu het element op plaats (i, j) in de matrix G van Stelling II.4.10, nu als volgt:

$$\langle a_j, a_i \rangle = \langle Ae_j, Ae_i \rangle = \langle Ae_j, (A^*)^* e_i \rangle = \langle A^* Ae_j, e_i \rangle.$$

We concluderen dat dit het element op plaats (i, j) van A^*A is. Dus $G = A^*A$.

Verder geldt voor een willekeurig element $w \in V$ en een willekeurige kolom a_i van A dat

$$\langle w, a_i \rangle = \langle w, Ae_i \rangle = \langle w, (A^*)^* e_i \rangle = \langle A^* w, e_i \rangle,$$

wat bewijst dat $b_w = A^*w$. De op te lossen vergelijking $Gx = b_w$ is dus precies

$$A^*Ax = A^*w.$$

Dit komt overeen met de bewering uit [Lay, Theorem 13 op pagina 406]. $\square$

Opgaven voor §II.4.

- (1) Ga van de volgende matrices na of het orthogonale projecties zijn en wat de kern en het beeld is.

$$\text{a. } P = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{b. } P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{c. } P = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{d. } P = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{e. } P = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & i & 2i \\ -i & 5 & -2 \\ -2i & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{f. } P = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -i & i \\ i & 1 & -1 \\ -i & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{g. } P = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & i & i \\ i & 1 & -1 \\ i & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{h. } P = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & -2i & 2i \\ 2i & 5 & 1 \\ -2i & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

- (2) Ga na of $V \perp W$ en $\mathbb{R}^3 = V + W$ en bereken de matrix van de projectie met $\text{Ker } P = V$ en $\text{Im } P = W$ als $V = \text{span}\{(1, 1, 1)\}$ en $W = \text{span}\{(1, -1, 0), (1, 1, -2)\}$.
- (3) Zij V de ruimte van de polynomen met complexe coëfficiënten van de graad ten hoogste 3 met als inwendig product $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t) \overline{q(t)} dt$. Zij $U = \text{span}\{1, t\}$ en $P_U: V \rightarrow V$ de orthogonale projectie van V op U . Bepaal $P_U p$ voor het polynoom $p(t) = 2 + 2t + t^2 + t^3$.
- (4) Zij V de vectorruimte die bestaat uit alle functies van de vorm $t \mapsto a \sin t + b \cos t$ met a, b en t reëel. Zij $\langle f, g \rangle = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} f(t)g(t) \cos t \, dt$.
- Toon aan dat $\cos t$ en $\sin t$ orthogonaal zijn en bereken $\|\cos(\cdot)\|$ en $\|\sin(\cdot)\|$.
 - Bepaal de orthogonale projectie van $\cos t$ op $\text{span}\{\frac{1}{2} \sin t + \frac{1}{2} \cos t\}$.

- c. Idem op $\text{span}\{2 \sin t + \cos t, \sin t + \cos t\}$.
- (5) Zij V de vectorruimte die bestaat uit alle functies van de vorm $t \mapsto at + b \sin t + c \sin 2t$ met a, b, c , en t reëel. Zij $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$.
- Toon aan dat $\sin t$ en $\sin 2t$ orthogonaal zijn en bereken $\|\sin(\cdot)\|$ en $\|\sin(2\cdot)\|$.
 - Bepaal de orthogonale projectie van t op $\text{span}\{\sin t, \sin 2t\}$.
 - Welke ongelijkheid voor π kun je uit de ongelijkheid van Bessel afleiden.
- (6) Zij V de ruimte van de polynomen van de graad ten hoogste n met reële coëfficiënten en zij $\langle p, q \rangle = \int_0^{\infty} p(t)q(t)e^{-t}dt$.
- Toon aan dat $\langle \cdot, \cdot \rangle$ een inwendig product op V definieert.
 - Bepaal met formule (II.4.4) de orthogonale projectie van t^2 op $\text{span}\{1, t\}$.
- (7) Zij V een unitaire ruimte en U een deelruimte. en zij P_U de orthogonale projectie op U . Toon aan dat $\|P_U x\| \leq \|x\|$.
- (8) Bepaal de eigenwaarden van de orthogonale projectie op een k -dimensionale deelruimte U van de n -dimensionale unitaire ruimte V .
- (9) Zij V de ruimte van alle lineaire combinaties van de functie $\sin t$ met de polynomen van de graad ten hoogste n in de variabele $t \in \mathbb{R}$. en zij $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt$.
- Bepaal met formule (II.4.4) voor de orthogonale projectie van $\sin t$ op $\text{span}\{1, t, t^2, t^3\}$.
 - Schrijf de gevonden projectie ook uit als een polynoom. Is de beste benadering een deel van de Taylorreeks voor $\sin t$?
- (10) Zij V de ruimte die bestaat uit alle functies van de vorm

$$p(t) = \beta t + \sum_{k=-4}^4 \alpha_k e^{ikt}, \quad \beta \in \mathbb{C}, \quad \alpha_k \in \mathbb{C}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Zij het inwendige product gegeven door

$$\langle p, q \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(t) \overline{q(t)} dt.$$

- Toon aan dat de functies e^{ikt} orthonormaal zijn.
- Bepaal de beste benadering van $f(t) = t$ door een combinatie van de functies e^{ikt} met $k = -4, \dots, 4$.

II.5. Unitaire operatoren

In deze paragraaf bekijken we matrices en operatoren die, grofweg gezegd, “lengte van vectoren behouden”. Een voorbeeld van zo’n operator is een rotatie in $\mathbb{R}^2$. Zie ook [Lay, pag. 394].

Unitaire matrices

Definitie II.5.1. Een complexe $n \times n$ matrix heet *unitair* als de kolommen een orthonormaal stelsel in $\mathbb{C}^n$ vormen.

Merk op dat dit impliceert dat de kolommen een orthonormale basis van $\mathbb{C}^n$ vormen.

Voorbeeld II.5.2. Zij

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dan is de matrix M unitair, zoals eenvoudig is na te rekenen. Terzijde: de transformatie gegeven door $T_M: x \mapsto Mx$, is de draaiing over $\frac{\pi}{4}$. $\square$

Lemma II.5.3. Zij M een $(n \times n)$ -complexe matrix. Dan zijn equivalent:

- (1) M is unitair;
- (2) M is inverteerbaar en $M^{-1} = M^*$.

BEWIJS. Als M unitair is dan vormen de kolommen van M een basis van $\mathbb{C}^n$. Dus is M inverteerbaar. Zij $M = (m_{ij})_{i=1}^n_{j=1}^n$ en $M^* = (n_{ij})_{i=1}^n_{j=1}^n$. Bezie de matrix M^*M . Het $(i, j)^e$ element $(M^*M)_{ij}$ van M^*M is het product van de i^e -rij van M^* en de j^e -kolom van M :

$$(II.5.1) \quad (M^*M)_{ij} = \begin{bmatrix} n_{11} & \dots & n_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{i1} & \dots & n_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{n1} & \dots & n_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & \dots & m_{1j} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{nj} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

Omdat $M^* = \overline{M}^T$ is dat element dus gelijk aan:

$$(II.5.2) \quad (M^*M)_{ij} = \begin{bmatrix} \overline{m_{11}} & \dots & \overline{m_{n1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{m_{1i}} & \dots & \overline{m_{ni}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{m_{1n}} & \dots & \overline{m_{nn}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & \dots & m_{1j} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{nj} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

Maar dit is $\sum_{k=1}^n \overline{m_{ki}} m_{kj}$, hetgeen gelijk is aan het inproduct van de j^e kolom van M met de i^e , en dus gelijk is aan 0 als $i \neq j$ en 1 als $i = j$. We concluderen dat $M^*M = I$, i.e. $M^{-1} = M^*$.

Anderzijds, als $M^{-1} = M^*$ en dus als $M^*M = I$, dan volgt uit (II.5.2) en (II.5.1) gemakkelijk dat de kolommen van M orthonormaal zijn. $\square$

In het volgende laten we zien hoe Lemma II.5.3 gebruikt kan worden om enkele niet zo voor de hand liggende feiten vast te stellen.

- Als M unitair is, dan is ook M^{-1} unitair. Immers, $M^{-1} = M^*$, en dus $(M^{-1})^* = M^{**} = M = (M^{-1})^{-1}$. In het bijzonder vormen dus ook de kolommen van M^{-1} een orthonormale basis van $\mathbb{C}^n$.
- Als M en N unitair zijn, dan is ook MN unitair. (Controleer dit zelf!)

Dit impliceert dat de unitaire matrices een groep vormen t.o.v. de vermenigvuldiging. Deze groep wordt aangeduid met $U(n, \mathbb{C})$.

Unitaire operatoren

Met de unitaire matrices in het achterhoofd, definiëren we nu de unitaire operatoren.

Definitie II.5.4. Zij V een unitaire ruimte en $T: V \rightarrow V$ een lineaire afbeelding. T heet een *unitaire operator* als $T^* \circ T = \text{Id}_V$. (Id_V staat hier voor de identieke afbeelding van V .)

Deze definitie roept enkele vragen op. Zo is een unitaire matrix inverteerbaar. Geldt dit ook voor een unitaire operator, en zo ja, wat is de inverse? Deze vraag wordt beantwoord in de volgende

Stelling II.5.5. Zij V een unitaire ruimte en $T: V \rightarrow V$ unitair. Dan is T inverteerbaar en $T^{-1} = T^*$. In het bijzonder geldt dus ook dat $T \circ T^* = \text{Id}_V$.

BEWIJS. We bewijzen eerst dat $\text{Ker } T = \{0\}$. Kies daartoe een vector $x \in V$ met $Tx = 0$. Dan geldt

$$x = T^*Tx = 0,$$

hetgeen is zoals gewenst.

Uit de Hoofdstelling van de Lineaire Algebra I.4.1 volgt nu dat

$$\dim \text{Im } T = \dim V - \dim \text{Ker } T = \dim V.$$

Maar dit betekent dat T surjectief is, want V is eindig-dimensionaal, en dus is T inverteerbaar. (Merk op dat als $T: V \rightarrow W$ inverteerbaar is, dan is $T^{-1}: W \rightarrow V$ lineair ([Lay, §3.3]).) Hieruit volgt

$$T^{-1} = \text{Id}_V \circ T^{-1} = T^* \circ T \circ T^{-1} = T^*$$

en dus ook dat $T \circ T^* = \text{Id}_V$. $\square$

Opmerking II.5.6. De afbeelding T heeft inderdaad de aangekondigde eigenschap de lengte onveranderd te laten. Immers, voor elke $v \in V$,

$$\|Tv\|^2 = \langle Tv, Tv \rangle = \langle v, T^*Tv \rangle = \langle v, v \rangle = \|v\|^2.$$

Sterker nog,

$$\langle Tv, Tw \rangle = \langle v, T^*Tw \rangle = \langle v, w \rangle,$$

en dus laat T zelfs het inwendig product van ieder tweetal vectoren $v, w \in V$ onveranderd. $\square$

We generaliseren dit nu tot een handige karakterisering van unitaire operatoren.

Stelling II.5.7. *Zij $T: V \rightarrow V$ een operator op de unitaire ruimte V . Dan zijn gelijkwaardig:*

- (1) T is een unitaire operator;
- (2) Voor alle $v, w \in V$ geldt $\langle v, w \rangle = \langle Tv, Tw \rangle$;
- (3) Voor alle $v \in V$ geldt $\|v\| = \|Tv\|$.

BEWIJS. Dat (1) zowel (2) als (3) impliceert hadden we al gezien. Eigenschap (2) impliceert eigenschap (3) door $v = w$ te kiezen en de wortel te trekken.

Eigenschap (3) impliceert eigenschap (2), als volgt. Kies $v, w \in V$. We gebruiken achtereenvolgens de polarisatieformule, de lineairiteit van T , eigenschap (3) en nogmaals de polarisatieformule:

$$\begin{aligned} \langle Tv, Tw \rangle &= \frac{1}{4} ((\|Tv + Tw\|^2 - \|Tv - Tw\|^2) + i(\|Tv + iTw\|^2 - \|Tv - iTw\|^2)) \\ &= \frac{1}{4} ((\|T(v + w)\|^2 - \|T(v - w)\|^2) + i(\|T(v + iw)\|^2 - \|T(v - iw)\|^2)) \\ &= \frac{1}{4} ((\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2) + i(\|v + iw\|^2 - \|v - iw\|^2)) \\ &= \langle v, w \rangle. \end{aligned}$$

Tenslotte impliceert (2) nog (1), als volgt. Omdat

$$\langle T^*Tv, w \rangle = \langle Tv, Tw \rangle = \langle v, w \rangle,$$

volgt dat $\langle T^*Tv - v, w \rangle = 0$ voor willekeurige $v, w \in V$. Dus ook

$$\langle T^*Tv - v, T^*Tv - v \rangle = 0.$$

Hieruit volgt dat $T^*Tv - v = 0$, i.e. $T^*Tv = v$, voor iedere $v \in V$, met andere woorden, $T^*T = \text{Id}_V$. $\square$

Het verband tussen unitaire matrices en unitaire operatoren

Zoals te verwachten, is het verband tussen unitaire matrices en unitaire operatoren soortgelijk aan het verband tussen Hermitische matrices en operatoren.

Stelling II.5.8. *Zij $\mathcal{B}$ een orthonormale basis van de unitaire ruimte V , en zij $T: V \rightarrow V$ een operator. Dan zijn equivalent:*

- (1) T is een unitaire operator;
- (2) De matrix $[T]_{\mathcal{B}}$ van T ten opzichte van de basis $\mathcal{B}$ is unitair.

BEWIJS. Zij $M = [T]_{\mathcal{B}}$ en $N = [T^*]_{\mathcal{B}}$. Uit Stelling II.2.9 volgt $N = M^*$. De operator T is unitair als en alleen als $T^* \circ T = \text{Id}_V$. We vertalen dit in matrices ten opzichte van de basis $\mathcal{B}$ en concluderen dat T unitair is als en alleen als $NM = I_n$ als en alleen als $M^*M = I_n$. Hier is n de dimensie van V . Uit Lemma II.5.3 volgt nu dat T unitair is als en alleen als M dat is. $\square$

Het reële geval

De definities van reële unitaire matrix en operator zijn woordelijk hetzelfde als die in het complexe geval, op vanzelfsprekende veranderingen na, zoals het vervangen van “unitaire ruimte” door “euclidische ruimte”, en $\mathbb{C}^n$ door $\mathbb{R}^n$. Een reële unitaire matrix/operator heet ook wel een

- *orthogonale* matrix/operator¹.

Zo wordt Lemma II.5.3:

Lemma II.5.9. *Zij M een $(n \times n)$ -reële matrix. Dan zijn equivalent:*

- (1) *M is orthogonaal;*
- (2) *M is inverteerbaar en $M^{-1} = M^T$.*

Merk op dat in het bewijs van Stelling II.5.7 de implicatie (3) $\Rightarrow$ (2) in het reële geval iets simpeler wordt.

¹Deze terminologie is niet erg gelukkig. Je zou verwachten dat zo’n matrix *orthonormaal* heet. Om onduidelijke redenen is orthogonaal de standaard geworden.

Opgaven voor §II.5.

- (1) Ga van de volgende matrices na of ze unitair zijn.
- $\begin{bmatrix} i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$
 - $\begin{bmatrix} i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$
 - $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -i & 2 & 2 \\ 2i & -1 & 2 \\ 2 & -2i & i \end{bmatrix}$
 - $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} i & i & i & i \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ i & -i & i & -i \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$
- (2) Zij U een $n \times n$ complexe unitaire matrix.
- Bewijs dat $|\det U| = 1$.
 - Zij λ een eigenwaarde van U . Bewijs dat $|\lambda| = 1$.
- (3) Kan een unitaire matrix zelfgeadjungeerd zijn? Geef bij een positief antwoord een voorbeeld en bij een negatief antwoord een bewijs.
- (4) Kan een orthogonale projectie een unitaire operator zijn?
- (5) Zij V de ruimte van de reële polynomen van de graad ten hoogste 1 met het inwendige product $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt$. Definieer voor iedere $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ de afbeelding $F_{(a,b)}: V \rightarrow V$ door $F_{(a,b)}(ct+d) = c(at+b)+d$.
- Toon aan dat $F_{(a,b)}$ lineair is.
 - Voor welke (a, b) is $F_{(a,b)}$ symmetrisch?
 - Laat zien dat $F_{(-1,1)}$ unitair is.
 - Voor welke (a, b) is $F_{(a,b)}$ unitair?
- (6) Zij V de ruimte van de reële polynomen van de graad ten hoogste n met het inwendige product $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(t)q(t)dt$. Definieer voor iedere $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ de afbeelding $F_{(a,b)}: V \rightarrow V$ door in het polynoom t te vervangen door $at+b$. (We substitueren een nieuwe variabele en noemen die opnieuw t !)
- Toon aan dat $F_{(a,b)}$ lineair is.
 - Voor welke (a, b) is $F_{(a,b)}$ unitair?

II.6. De spectraalstelling voor zelfgeadjungeerde operatoren

In [Lay, §7.1] is Theorem 3 de Spectraalstelling voor symmetrische matrices. Het bewijs wordt niet volledig gegeven in de tekst. In deze paragraaf bewijzen we een sterkere stelling, namelijk de Spectraalstelling voor zelfgeadjungeerde operatoren en leiden daaruit af dat een symmetrische matrix te diagonaliseren is door een orthogonale matrix.

Voorbereiding

Lemma II.6.1. *Zij $T: V \rightarrow V$ een zelfgeadjungeerde operator op de unitaire ruimte V . Dan geldt:*

- (1) *Voor elke $v \in V$ is $\langle Tv, v \rangle$ reëel;*
- (2) *Elke eigenwaarde van T is reëel.*

BEWIJS. Omdat $T = T^*$ volgt dat $\langle Tv, v \rangle = \langle v, Tv \rangle = \overline{\langle Tv, v \rangle}$ en dus is $\langle Tv, v \rangle$ een reëel getal. Dit bewijst (1). Als $Tv = \lambda v$ met $v \neq 0$, dan $\langle Tv, v \rangle = \lambda \langle v, v \rangle$. Omdat $0 \neq \langle v, v \rangle \in \mathbb{R}$ en $\langle Tv, v \rangle \in \mathbb{R}$ volgt dat $\lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

Het volgende lemma is het complexe analogon van [Lay, Theorem 1 op pagina 444].

Lemma II.6.2. *Zij $T: V \rightarrow V$ een zelfgeadjungeerde operator op de unitaire ruimte V . Als $v, w \in V$ eigenvectoren van T zijn die bij verschillende eigenwaarden horen, dan staan v en w loodrecht op elkaar.*

BEWIJS. Stel $Tv = \lambda v$ en $Tw = \mu w$, met $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ en $\lambda \neq \mu$. Uit het vorige lemma volgt dat λ en μ reëel zijn. Daar

$$\langle Tv, w \rangle = \langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle,$$

en

$$\langle v, Tw \rangle = \langle v, \mu w \rangle = \bar{\mu} \langle v, w \rangle = \mu \langle v, w \rangle,$$

volgt uit het zelfgeadjungeerd zijn van T dat $(\lambda - \mu) \langle v, w \rangle = 0$. Omdat $\lambda \neq \mu$ impliceert dit dat $\langle v, w \rangle = 0$. $\square$

In het volgende voorbeeld laten we zien hoe in principe het bewijs van de spectraalstelling werkt.

Voorbeeld II.6.3. Zij $T: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ de matrixoperator bij de matrix

$$A = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{bmatrix}.$$

Na enig rekenen volgt dat het karakteristieke polynoom van A gelijk is aan $\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2$ en dus dat er een eigenwaarde 1 is. We zijn op zoek naar een orthonormale basis van eigenwaarden. De eigenvector bij de eigenwaarde 1 blijkt

de vector $v_1 = \frac{1}{3}(2, 2, 1)$ te zijn. Vul v_1 aan tot een orthonormale basis $\mathcal{B} = \{v_1, w_2, w_3\}$ van $\mathbb{C}^3$. De matrix van T ten opzichte van deze basis kunnen we uitrekenen. We weten dat $Tv_1 = v_1$. Verder drukken we Tw_2 en Tw_3 uit in de basis. In eerste instantie vinden een matrix

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & w_{12} & w_{13} \\ 0 & w_{22} & w_{23} \\ 0 & w_{32} & w_{33} \end{bmatrix}.$$

We weten echter dat de matrix van een zelfgeadjungeerde operator ten opzichte van een orthonormale basis een zelfgeadjungeerde matrix is (Stelling II.2.9). Dus moet $w_{12} = w_{13} = 0$ en $w_{32} = \overline{w_{23}}$. De matrix van T ten opzichte van $\mathcal{B}$ ziet er dus uit als

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & w_{22} & w_{23} \\ 0 & \overline{w_{23}} & w_{33} \end{bmatrix}.$$

Hierbij zijn w_{22} en w_{33} reële getallen. We zouden natuurlijk die vectoren w_2 en w_3 echt kunnen uitrekenen. (Bijvoorbeeld door ook de andere eigenwaarden te bepalen!) Voor het bewijs van de stelling zullen we evenwel straks als inductie aanname gebruiken, dat we voor operatoren op twee-dimensionale ruimten de stelling al kennen. Omdat uit de matrix $[T]_{\mathcal{B}}$ volgt dat voor iedere vector in $v_1^\perp$ ook het beeld onder T in $v_1^\perp$ ligt, bestaat de operator $T \upharpoonright v_1^\perp : v_1^\perp \rightarrow v_1^\perp$. We weten dus dat er een orthonormale basis van eigenvectoren voor de operator $T \upharpoonright v_1^\perp$ is. We kunnen dus vectoren v_2, v_3 in $v_1^\perp$ kiezen zodat $(T \upharpoonright v_1^\perp)v_i = \lambda_i v_i$ voor $i = 2, 3$. Maar dan ook $Tv_i = \lambda_i v_i$. We hebben een orthonormale basis van eigenvectoren van T gevonden.

Voor het goede begrip merken we nog op dat

$$\begin{bmatrix} w_{22} & w_{23} \\ \overline{w_{23}} & w_{33} \end{bmatrix}$$

de matrix $(T \upharpoonright v_1^\perp)_{\{w_2, w_3\}}$ van T beperkt tot $v_1^\perp = \text{span}\{w_2, w_3\}$ ten opzichte van de basis $\{w_2, w_3\}$ is. $\square$

De volgende twee lemma's zijn essentiële ingrediënten voor het bewijs van de spectraalstelling.

Lemma II.6.4. *Zij $T: V \rightarrow V$ een zelfgeadjungeerde operator op de unitaire ruimte V . Als v een eigenvector is van T en $w \perp v$ dan ook $Tw \perp v$.*

BEWIJS. Stel $Tv = \lambda v$ voor een zekere $\lambda \in \mathbb{C}$ (in feite $\lambda \in \mathbb{R}$, zie Lemma II.6.1). Dan:

$$\langle Tw, v \rangle = \langle w, Tv \rangle = \overline{\lambda} \langle w, v \rangle = 0.$$

omdat $\langle w, v \rangle = 0$. $\square$

We zouden de conclusie van Lemma II.6.4 ook kunnen formuleren als

$$T \upharpoonright \{v\}^\perp : \{v\}^\perp \rightarrow \{v\}^\perp$$

bestaat.

Lemma II.6.5. *Zij $T: V \rightarrow V$ een operator op een eindig-dimensionale vectorruimte V over $\mathbb{C}$. Dan heeft T een eigenvector.*

BEWIJS. Kies een basis $\mathcal{B}$ van V en zij $M = [T]_{\mathcal{B}}$. Het karakteristieke polynoom $p(\lambda) = \det(M - \lambda I)$ heeft volgens de “Hoofdstelling van de Algebra” een nulpunt. Met andere woorden, er bestaat een $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ met $p(\lambda_0) = 0$. Dan is λ_0 een eigenwaarde van T . Er is dus een vector $v_0 \neq 0$ zó dat $Tv_0 = \lambda_0 v_0$. $\square$

Het hoofdresultaat

Stelling II.6.6 (Spectraalstelling: het complexe geval). *Zij $T: V \rightarrow V$ een zelfgeadjungeerde operator op de unitaire ruimte V met $\dim V \geq 1$. Dan bezit V een orthogonale basis die uit eigenvectoren van T bestaat.*

BEWIJS. We passen inductie naar de dimensie van V toe.

Als $\dim V = 1$, dan nemen we de eigenvector uit Lemma II.6.5, die dan automatisch een basis is.

Neem aan dat de stelling is bewezen voor alle unitaire ruimten W met $\dim W \leq n$. Zij V een unitaire ruimte van dimensie $n + 1$ en $T: V \rightarrow V$ een zelfgeadjungeerde operator. Volgens Lemma II.6.5 heeft T een eigenvector, zeg $v_1 \in V$. Zij $W = \{v_1\}^\perp$. Dan is W een lineaire deelruimte van V en $\dim W = n$ (Stelling II.4.3). Voor iedere vector $w \in W$ geldt dat $w \perp v_1$ en volgens Lemma II.6.4 ook $Tw \perp v_1$. Dus als $w \in W$ dan $Tw \in W$. De restrictie $T \upharpoonright W: W \rightarrow W$ bestaat dus. Met de beperking van het inwendige product op V tot W is W een unitaire ruimte. Bovendien geldt voor $w_1, w_2 \in W$,

$$\langle (T \upharpoonright W)w_1, w_2 \rangle = \langle Tw_1, w_2 \rangle = \langle w_1, Tw_2 \rangle = \langle w_1, (T \upharpoonright W)w_2 \rangle.$$

Dus $T \upharpoonright W: W \rightarrow W$ is ook zelfgeadjungeerd. Volgens de inductie-aanname bestaat er een orthogonale basis $\{v_2, \dots, v_{n+1}\}$ van W die bestaat uit eigenvectoren van $T \upharpoonright W$. Die vectoren $v_2, \dots, v_{n+1}$ zijn ook eigenvectoren van T omdat $(T \upharpoonright W)v_i = Tv_i$. Het stelsel $\{v_1, v_2, \dots, v_{n+1}\}$ is orthogonaal ($v_1 \perp v_j$ als $j \geq 2$ omdat $v_j \in W$ en voor $2 \leq i < j \leq n + 1$ geldt $v_i \perp v_j$ omdat $\{v_2, \dots, v_{n+1}\}$ orthogonaal is) en bestaat uit $n + 1$ vectoren. Het stelsel is dus lineair onafhankelijk en het aantal elementen is $\dim V$ wat bewijst dat het een basis is. De gevraagde basis is derhalve $\{v_1, v_2, \dots, v_{n+1}\}$. $\square$

Blijkbaar is een zelfgeadjungeerde operator te diagonaliseren. Er geldt meer: de diagonaliserende basis kan orthogonaal gekozen worden. Door de basisvectoren te normeren, mogen we zelfs veronderstellen dat die basis ook orthonormaal is.

Voorbeeld II.6.7. Stel we willen een basis van $\mathbb{C}^2$ bepalen van eigenvectoren van de operator waarvan de matrix M gegeven wordt door

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix}.$$

Merk op dat inderdaad $M^* = M$. De eigenwaarden van M vinden we door het oplossen van de vergelijking

$$0 = \det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1+i \\ 1-i & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4.$$

Dat levert twee, naar behoren reële (Lemma II.6.1!), eigenwaarden $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = 4$. Twee willekeurige eigenvectoren corresponderen met λ_1 en λ_2 staan dus loodrecht op elkaar (Lemma II.6.2), zijn dus lineair onafhankelijk (§I.3) en vormen dus een orthogonale basis van $\mathbb{C}^2$. Een eigenvector bij $\lambda_1 = 1$ vinden we als oplossing van

$$\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{bmatrix} x = 0.$$

(De rang van de matrix is inderdaad 1, controleren!) Kies dus bijvoorbeeld als oplossing $v_1 = (1+i, -1)$. Bij $\lambda_2 = 4$ vinden we (bijvoorbeeld) $v_2 = (1+i, 2)$. Nu is $\{v_1, v_2\}$ de gewenste orthogonale basis. $\square$

Toepassingen

Gevolg II.6.8. Zij M een zelfgeadjungeerde complexe $(m \times m)$ -matrix. Dan:

- (1) Er is een orthonormale basis $\mathcal{B}$ van $\mathbb{C}^m$ die bestaat uit eigenvectoren van M ;
- (2) De matrix U met als kolommen de elementen van de basis $\mathcal{B}$ is unitair en U^*MU is een diagonaalmatrix met reële diagonaalelementen.

BEWIJS. De eigenschap (1) volgt door toepassen van Stelling II.6.6 op de bij M horende matrixtransformatie van $\mathbb{C}^m$. De matrix U is per definitie een unitaire matrix. Zij $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_m\}$ en $U = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_m \end{bmatrix}$. Stel dat λ_j de eigenwaarde is bij de eigenvector v_j . Dan

$$M \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 & \cdots & \lambda_m v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{bmatrix}.$$

Dus $MU = UD$ en daarom $U^{-1}MU = U^*MU = D$, met D de diagonaalmatrix met als diagonaalelementen de eigenwaarden van M . $\square$

Gevolg II.6.9. Zij M een complexe $(m \times m)$ -matrix. Dan zijn equivalent:

- (1) Er is een unitaire matrix U zodat $U^{-1}MU$ een reële diagonaalmatrix is;
- (2) M is zelfgeadjungeerd.

BEWIJS. Dat eigenschap (2) eigenschap (1) impliceert staat in Gevolg II.6.8. Omgekeerd, als $U^{-1}MU = D$ met U unitair en D reëel en diagonaal, dan $M = UDU^{-1} = UDU^*$. Dus

$$M^* = (UDU^*)^* = UD^*U^* = UDU^* = M$$

want D is reëel. □

Voorbeeld II.6.10. Zij

$$M = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

We berekenen een orthogonale basis van eigenvectoren van M .

Het karakteristieke polynoom van M is $-(\lambda^3 - 3\lambda - 2)$ met als evidente wortel -1 . Na enig gereken vinden we als eigenwaarden $-1, -1, 2$. De eigenvectoren bij de eigenwaarde -1 bepalen we uit $(M + I_3)x = 0$. Dat levert de vergelijking

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} x = 0.$$

De rang van $M + I_3$ is overduidelijk gelijk aan 1. Een basis voor de nulruimte van $M + I_3$ is bijvoorbeeld $\{(1, 1, 0), (1, 0, -2)\}$. Die basis is niet orthogonaal. Hier is het probleem dat eigenvectoren bij **dezelfde** eigenwaarde niet automatisch orthogonaal zijn. Met Gram-Schmidt vinden we nu als orthogonale basis van de nulruimte van $M + I_3$ het stelsel $\{(1, 1, 0), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -2)\}$. Bij de eigenwaarde 2 vinden we bijvoorbeeld als eigenvector $(2, -2, 1)$. Deze vector staat loodrecht op de andere twee eigenvectoren (Lemma II.6.2). We hebben nu een drietal orthogonale eigenvectoren van M gevonden. Daarmee is een basis voor $\mathbb{C}^3$ bestaande uit eigenvectoren van M bepaald. □

Het reële geval

Aan het eind van deze paragraaf bekijken we weer de reële situatie: symmetrische matrices en symmetrische operatoren op een euclidische ruimte. In tegenstelling tot de vorige paragraaf, verandert er iets wezenlijks wanneer we deze paragraaf voor het reële geval willen herschrijven. Zij M een reële $(n \times n)$ -matrix. Daarbij behoort een matrixtransformatie op $\mathbb{R}^n$. Die noteren we in de rest van deze paragraaf als $T_M(\mathbb{R})$. Daarnaast behoort bij M ook een matrixtransformatie op $\mathbb{C}^n$. Die noteren we als $T_M(\mathbb{C})$. Bedenk dat een reële matrix complexe eigenwaarden kan hebben.

Als we het bewijs van de spectraalstelling doorlopen, stuiten we op Lemma II.6.5. Het bewijs van dit lemma in de reële situatie behoeft enige aanpassing.

Lemma II.6.11. *Zij $T: V \rightarrow V$ een symmetrische operator op de euclidische ruimte V . Dan heeft T een eigenvector.*

BEWIJS. Kies een orthonormale basis $\mathcal{B}$ van V en zij $M = [T]_{\mathcal{B}}$ de matrix van T ten opzichte van deze basis. Bekijk nu $T_M(\mathbb{C})$. De matrix van deze operator ten opzichte van de standaard basis van $\mathbb{C}$ is M . Uiteraard heeft $T_M(\mathbb{C})$ een eigenwaarde $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ (Lemma II.6.5). Dus volgt dat $\det(M - \lambda_0 I) = 0$. Omdat de matrix M symmetrisch is, is $T_M(\mathbb{C})$ een zelfgeadjungeerde operator. Dus $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ (Lemma II.6.1). Daar $M - \lambda_0 I$ een reële matrix is met $\det(M - \lambda_0 I) = 0$, is er een vector $x \in \mathbb{R}^n$ met $x \neq 0$ en $(M - \lambda_0 I)x = 0$, m.a.w. $Mx = \lambda_0 x$. Vat de vector x nu op als de coördinaten van een vector $v \in V$ ten opzichte van de basis $\mathcal{B}$. Dan

$$[Tv]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} = Mx = \lambda_0 x = \lambda_0 [v]_{\mathcal{B}} = [\lambda_0 v]_{\mathcal{B}}.$$

We vinden dat $v \neq 0$ en $Tv = \lambda_0 v$. □

Zonder verdere complicaties vinden we nu de gezochte stelling.

Stelling II.6.12 (Spectraalstelling: het reële geval). *Zij $T: V \rightarrow V$ een symmetrische operator op de euclidische ruimte V met $\dim V \geq 1$. Dan bezit V een orthogonale basis die uit eigenvectoren van T bestaat.*

Merk op dat hiermee het bewijs van [Lay, Theorem 7.1] gecompleteerd is. Verder gaat ook de rest van de paragraaf nu door voor het reële geval met de voor de hand liggende aanpassingen. Zo is in Gevolg II.6.8 de matrix U nu een orthogonale matrix en kan daar de toevoeging “met reële diagonaalelementen” worden weggelaten.

Opgaven voor §II.6.

- (1) Geef een voorbeeld van een reële (2×2) -matrix die geen reële eigenwaarden heeft.
- (2) Zij V een unitaire ruimte en $T: V \rightarrow V$ een Hermitische operator. Bewijs dat de volgende twee uitspraken equivalent zijn:
 - (1) alle eigenwaarden van T zijn (reëel en) positief;
 - (2) $\langle Tv, v \rangle > 0$ voor iedere $v \neq 0$ in V .
 (In dat geval heet T een
 - *positief definitie operator*,
 vgl [Lay, §7.2].)
- (3) Zij A een positief definitie $n \times n$ matrix. Bewijs dat A inverteerbaar is en dat ook A^{-1} positief definit is.
- (4) Zij $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.
 - a. Bepaal een matrix B zodat $B^2 = A$.
 - b. Bepaal een matrix C zodat $C^3 = A$.
- (5) Zij V een unitaire ruimte met $\dim V \geq 1$. Van de zelfgeadjungeerde operatoren A en B op V is gegeven dat $A \circ B = B \circ A$. Bewijs dat er een orthogonale basis is van V die bestaat uit vectoren die zowel eigenvector voor A zijn als voor B . (Hint: Als λ een eigenwaarde is van A , en W_λ is de bijbehorende eigenruimte, bewijs dat $B(W_\lambda) \subset W_\lambda$ en bekijk de restrictie van B tot W_λ .)
- (6) Gegeven zijn:
 - een euclidische vectorruimte met $\dim V \geq 2$.
 - een element $v \in V$ met $\|v\| = 1$;
 - voor ieder tweetal reële getallen α en β een operator $A_{\alpha,\beta}$ gedefinieerd door
$$A_{\alpha,\beta}x = \alpha\langle x, v \rangle v + \beta x$$

$$(x \in V);$$
 - a. Toon aan dat voor iedere α en β de operator $A_{\alpha,\beta}$ symmetrisch is.
 - b. Toon aan dat $A_{\alpha,\beta}$ unitair is als en alleen als $\alpha^2 + 2\alpha\beta = 1 - \beta^2 = 0$. Kies verder $\alpha \neq 0$.
 - c. Bepaal alle eigenwaarden van A met de bijbehorende eigenruimten.
- (7) Zij V een unitaire ruimte en $T: V \rightarrow V$ een Hermitische operator. Zij $\{u_1, \dots, u_n\}$ een orthonormale basis van V bestaande uit eigenvectoren van T . De eigenwaarde bij de eigenvector u_k noemen we λ_k . Toon aan dat voor een getal $\lambda \in \mathbb{R}$ met λ niet een eigenwaarde van T , voor alle

$y \in V$ geldt dat

$$(A - \lambda I)^{-1}y = \sum_{k=1}^n \frac{\langle y, u_k \rangle}{\lambda_k - \lambda} u_k.$$

- (8) Zij $\mathbb{R}^2$ voorzien van het standaard inwendige product. Zij $\mathcal{B} = \{(1, 0), (1, 1)\}$, en zij de matrix van de operatoren T_1 en T_2 op $\mathbb{R}^2$ ten opzichte van $\mathcal{B}$ gegeven door

$$[T_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad [T_2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- a. Ga na of T_1 een symmetrische operator is.
- b. Ga na of T_2 een symmetrische operator is.

HOOFDSTUK III

Lineaire differentiaalvergelijkingen

III.1. De exponent van een matrix

We gaan in dit hoofdstuk lineaire algebra toepassen om lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten op te lossen. [Zie Lay, §5.7.] Een 1-dimensionale differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten

$$x'(t) = ax(t), \quad x(0) = x_0 \quad \text{voor } t \in \mathbb{R},$$

waarbij a en x_0 constanten zijn in $\mathbb{R}$, heeft als oplossing $x(t) = e^{at}x_0$. Omdat dit voor latere doeleinden handig is, kijken we ook naar het geval dat a complex is en dus ook x complexe waarden aanneemt. De afgeleide is dan per definitie de som van de afgeleide van het reële deel en i maal de afgeleide van het imaginaire deel. Neem dus $a = \alpha + i\beta$. Dan is $e^{at} = e^{\alpha t}e^{i\beta t} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t))$. Als nu $x(t) = e^{at}x_0$, dan vinden we

$$\begin{aligned} x'(t) &= [\alpha e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)) + e^{\alpha t}(-\beta \sin(\beta t) + i\beta \cos(\beta t))]x_0 \\ &= (\alpha + i\beta)x(t) = ax(t). \end{aligned}$$

Dus ook als a complex is, dan is $x(t) = e^{at}x_0$ de oplossing van de vergelijking $x'(t) = ax(t)$, $x(0) = x_0$. In het vervolg bekommen we ons er niet meer om of a reëel of complex is. Verder gebruiken we voor de afgeleide in het vervolg de notatie $\dot{x}$ die ook vaak in de natuurkunde wordt gebruikt. Zij nu A een $n \times n$ matrix. We gaan nu op zoek naar de vectorfunctie $x(t)$ die de oplossing is van een n -dimensionale differentiaalvergelijking van de vorm

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n,$$

en willen die oplossing schrijven in de vorm

$$x(t) = e^{tA}x_0.$$

Omdat x_0 en x n -vectoren zijn, moet e^{tA} een $n \times n$ -matrix zijn (net als A). Laten we het ons eens gemakkelijk maken: we nemen voor A de diagonale matrix Λ met de (complexe) getallen $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ op de diagonaal. Dan is de differentiaalvergelijking $\dot{x} = \Lambda x$ in feite

$$\dot{x}_i = \lambda_i x_i, \quad x_i(0) = x_{0i} \quad (i = 1, \dots, n)$$

en het ligt voor de hand om te schrijven

$$(III.1.1) \quad e^{t\Lambda} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}.$$

en is $e^{t\Lambda}x_0$ inderdaad de oplossing van de vergelijking omdat $x_i(t) = e^{\lambda_i t}x_{0i}$. Je kunt ook gebruiken dat $\frac{d}{dt}e^{t\Lambda} = \Lambda e^{t\Lambda}$. Reken dit na, waarbij je moet gebruiken dat een matrixfunctie gedifferentieerd wordt door de elementen ieder apart te differentieren.

We gaan nu de machtreeksen voor de exponentiële functies uitschrijven. Zoals bekend is $e^{ta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} a^k$. We bekijken de reeks $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$, die per definitie (absoluut) convergent is als alle n^2 reksen van functies die erin voorkomen (absoluut) convergent zijn. Bijvoorbeeld

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \Lambda^k = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^k t^k}{k!} & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^k t^k}{k!} \end{bmatrix} = e^{t\Lambda}.$$

als in (III.1.1). In dit geval is de convergentie duidelijk. In het algemeen is het niet zo simpel in te zien dat $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$ convergent is voor alle waarden van t , maar het is wel waar. De volgende stelling brengt een aantal eigenschappen bij elkaar.

Stelling III.1.1. *Zij A een $n \times n$ matrix, B een $n \times m$ matrix en C een $m \times n$ matrix. Dan geldt:*

- (1) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$ is absoluut convergent voor alle $t \in \mathbb{R}$.
De som noteren we als e^{tA} .
- (2) $C(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k)B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} CA^k B$.
- (3) $\frac{d}{dt} C e^{tA} B = C \frac{d}{dt} e^{tA} B$.
- (4) $\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}$.

Onderdeel (1) van de Stelling bewijzen we grotendeels in het volgende. Eén feit zal daarbij alleen worden geponeerd. De onderdelen (2) en (3) volgen direct uit het feit dat het bepalen van limieten of afgeleiden en het vormen van lineaire combinaties in volgorde mogen worden omgewisseld, bijvoorbeeld ‘de afgeleide van een lineaire combinatie’ is ‘dezelfde lineaire combinatie van de afgeleiden’. Op onderdeel (4) komen we nog terug; we weten dit al voor het speciale geval van diagonaalmatrices.

Veronderstel dat $A = P\Lambda P^{-1}$, met Λ als boven. We nemen dus aan dat A diagonaliseerbaar is. Dan geldt dat $A^k = P\Lambda^k P^{-1}$ en dus ook voor iedere M dat

$$\sum_{k=0}^M \frac{t^k}{k!} A^k = \sum_{k=0}^M \frac{t^k}{k!} (P\Lambda^k P^{-1}) = P \left(\sum_{k=0}^M \frac{t^k}{k!} \Lambda^k \right) P^{-1}.$$

Omdat de rechterzijde van deze gelijkheden convergeert hebben we nu voor het speciale geval dat A diagonaliseerbaar is onderdeel (1) van de Stelling bewezen en ingezien dat $e^{tA} = P e^{t\Lambda} P^{-1}$. Verder volgt uit de onderdelen (2) en (3) van de Stelling nu ook

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = \frac{d}{dt} P e^{t\Lambda} P^{-1} = P \Lambda e^{t\Lambda} P^{-1} = P \Lambda P^{-1} P e^{t\Lambda} P^{-1} = A e^{tA},$$

wat onderdeel (4) van de Stelling bewijst voor het speciale geval van diagonaliseerbare matrices. Dus geldt, als $x(t) = e^{tA} x_0$ dat $\dot{x} = A e^{tA} x_0 = A x(t)$, terwijl $x(0) = x_0$. We hebben nu de oplossing van de differentiaalvergelijking weergegeven als $x(t) = e^{tA} x_0$ als A diagonaliseerbaar is.

Maar er zijn ook matrices die niet diagonaliseerbaar zijn zoals

$$(III.1.2) \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(Als N diagonaliseerbaar zou zijn, dan zou de diagonalisatie de eigenwaarden 0 op de diagonaal moeten hebben en dus gelijk zijn aan de nul-matrix). Deze matrix N behoort tot de *nilpotente* matrices, d.w.z. matrices N zo dat er een $k \in \mathbb{N}$ is waarvoor geldt $N^k = 0$. Voor de nilpotente matrices kunnen we onze definitie van de e -macht prima gebruiken, immers de som $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{N^k t^k}{k!}$ is eindig en we hoeven ons dus geen zorgen te maken over de convergentie ervan. Als we N nemen zoals in (III.1.2), dan is

$$e^{tN} = N^0 + \frac{t}{1!} N + \frac{t^2}{2!} N^2 + \cdots = I + tN = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Reken ook na dat als $N^k = 0$ dan $\frac{d}{dt} e^{tN} = N e^{tN}$, door de eindige reeksen uit te schrijven en te vergelijken.

Definitie III.1.2. Zij G_n de ruimte van $n \times n$ -matrices die geschreven kunnen worden als $S + N$, waarbij S diagonaliseerbaar is en N nilpotent, en tevens geldt dat $SN = NS$.

Een voorbeeld van zo'n matrix is de matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zij $A \in G_n$. Dan

$$(III.1.3) \quad e^{tA} = e^{tN} e^{tS}.$$

Om dit te bewijzen moeten we aantonen dat

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} N^k\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} S^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (N + S)^k.$$

Het bewijs hiervan wat minder gecompliceerd dan het lijkt omdat de uiterste linker som eindig is. Desondanks laten we het bewijs hier achterwege. (Invullen van de details is een uitdaging aan de lezer.) Een element van e^{tA} is dus nu een som van n producten van een element van e^{tN} en een element van e^{tS} . Daarom geldt ook voor $e^{tN}e^{tS}$ de gewone regel voor het differentieren van een product. Dus

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = \frac{d}{dt}e^{tN} \cdot e^{tS} + e^{tN} \frac{d}{dt}e^{tS} = Ne^{tN}e^{tS} + e^{tN}Se^{tS}.$$

Nu willen we nog zien dat $e^{tN}S = Se^{tN}$. Omdat $SN = NS$ is ook $SN^k = N^kS$ voor iedere k en volgt

$$Se^{tN} = S \sum_{k=0}^M \frac{t^k}{k!} N^k = \sum_{k=0}^M \frac{t^k}{k!} SN^k = \sum_{k=0}^M \frac{t^k}{k!} (N^kS) = \left(\sum_{k=0}^M \frac{t^k}{k!} N^k\right) S = e^{tN}S.$$

Daarom

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ne^{tN}e^{tS} + e^{tN}Se^{tS} = (N + S)e^{tN}e^{tS} = Ae^{tA}.$$

Dit bewijst onderdeel (4) voor het geval dat $A \in G_n$.

Voorbeeld III.1.3. Zij

$$(III.1.4) \quad A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dan is

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{t\lambda} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda} \end{bmatrix} = e^{t\lambda} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nu we weten dat de e -macht gedefinieerd is voor matrices in G_n , is natuurlijk de volgende vraag: zijn er nog andere matrices? Het antwoord op deze vraag is **nee!** We zullen dit antwoord niet bewijzen.

We stellen ons op een puur operationeel standpunt. Dan wordt de vraag: gegeven A , hoe bereken ik S en N ?

Wanneer we een diagonaliseerbare S hebben, dan brengen we die als volgt in diagonaalvorm [Zie Lay §5.3]: eerst berekenen we het karakteristieke polynoom, dit is $\det(\lambda I - A)$. Dan bepalen we de wortels λ_i van dit polynoom met hun multipliciteit μ_i . Daarna gaan we voor ieder van deze wortels de kern van $(A - \lambda_i I)^{\mu_i}$ bepalen. Dat levert ons lineair onafhankelijke vectoren $v_i^k, k = 1, \dots, \mu_i$. [Commentaar: voor diagonaliseerbare matrices is de kern van $(A - \lambda_i I)^{\mu_i}$ gelijk aan de kern van $(A - \lambda_i I)$, maar in het algemeen niet. Dat we hier toch schrijven $(A - \lambda_i I)^{\mu_i}$ dient een later doel.]

Als eindresultaat vinden we n vectoren, die we in een matrix P zetten. Omdat alle vectoren samen de ruimte $\mathbb{R}^n$ opspannen, is P inverteerbaar en we kunnen $S = P^{-1}AP$ uitrekenen en dat is de gevraagde diagonale matrix.

We gaan nu precies hetzelfde doen met een willekeurige matrix A . [Hier is die macht met μ_i wel van belang.] Dat levert in het algemeen geen diagonale matrix op, maar dat geeft niet. We weten immers al hoe de diagonale matrix eruit zou moeten zien: op de diagonaal staan de eigenwaarden van A in dezelfde volgorde als de eigenvectoren in P . Laten we deze diagonaalmatrix Λ noemen. Dan moet $S = P\Lambda P^{-1}$ het diagonaliseerbare gedeelte van A zijn. Vervolgens nemen we $N = A - S$.

Dan gaan we na of aan alle voorwaarden voldaan is. Dat S diagonaliseerbaar is, spreekt vanzelf. Eerst bewijzen we dat $AS = SA$. Neem een kolom van P , zeg p . Daarvoor geldt dat $Sp = \lambda p$ en $(A - \lambda I)^n p = 0$ omdat n groter is dan de multipliciteit van de eigenwaarde λ van A . Dan ook $(A - \lambda I)^n Ap = (A - \lambda I)^n Ap - \lambda(A - \lambda I)^n p = (A - \lambda I)^{n+1} p = 0$. Dus ook Ap is in de kern van $(A - \lambda I)^n$. Daarom $SAP = \lambda Ap = A\lambda p = ASp$. Dit geldt voor iedere kolom en daarom $ASP = SAP$ en omdat P inverteerbaar is ook $AS = SA$. Nu we weten dat $AS = SA$ volgt direct dat $(A - S)S = S(A - S)$ en dus dat $NS = SN$. Nog blijft aan te tonen dat N nilpotent is. We bewijzen dat $N^n = 0$. Merk eerst op dat $(A - S)^{k-1}A = A(A - S)^{k-1}$ omdat $AS = SA$. Daarom geldt voor iedere kolom p van P en iedere k dat $(A - S)^k p = (A - S)^{k-1}(A - S)p = (A - S)^{k-1}(Ap - \lambda p) = (A - \lambda I)(A - S)^{k-1}p$. Dus via inductie volgt $(A - S)^n p = (A - \lambda I)^n p = 0$. Daaruit volgt dat $(A - S)^n P = 0$ en dus dat $N^n = (A - S)^n = 0$. We besluiten dat inderdaad $SN = NS$, N is nilpotent en $A = N + S$.

Als alles is afgecheckt, kunnen we e^{tA} berekenen. Merk op dat hier niet is bewezen dat dit altijd goed gaat. Er ontbreekt nog dat door bases te nemen voor de kernen van $(A - \lambda_i I)^{\mu_i}$ voor alle eigenwaarden λ_i met hun bijbehorende multipliciteit μ_i , we een basis krijgen van de $\mathbb{C}^n$. Dat behandelen we niet in deze cursus. Het is bijvoorbeeld te vinden in het boek: *The Theory of Matrices* van P. Lancaster en M. Tismenetski, ISBN 0-12-435560-9 (Academic Press)

Voorbeeld III.1.4. Zij A gegeven door

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Het karakteristieke polynoom is:

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1$$

Dat betekent dat de eigenwaarden i en $-i$ zijn, ieder met multipliciteit 2. De kern van $(A - iI)^2$ is opgespannen door de vectoren

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -i \\ 1 & 0 \\ -i & -i \end{bmatrix}$$

en de kern van $(A + iI)^2$ door de vectoren

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & i \\ 1 & 0 \\ i & i \end{bmatrix}.$$

Dus nemen we voor P

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -i & 0 & i \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -i & -i & i & i \end{bmatrix}.$$

Dan vinden we, met

$$\Lambda = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$$

dat

$$S = P\Lambda P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

en dus

$$N = A - S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ga nu na dat inderdaad $N^2 = 0$ en $NS = SN$. We kunnen uitrekenen dat

$$e^{tS} = Pe^{t\Lambda}P^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 & 0 \\ 0 & \sin(t) & \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & 0 & \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}$$

en

$$e^{tN} = 1 + tN = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -t & 1 & 0 \\ t & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Het eindresultaat is

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 & 0 \\ -t \sin(t) & -t \cos(t) + \sin(t) & \cos(t) & -\sin(t) \\ t \cos(t) + \sin(t) & -t \sin(t) & \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}.$$

Ga na dat e^{tA} gelijk is aan 1 als $t = 0$ en dat $\frac{d}{dt}e^{tA}|_{t=0} = A$. Dit zijn zaken die aan het eind van een berekening altijd eenvoudig na te gaan zijn (en dus ook nagegaan moeten worden!).

Opgaven voor §III.1.

- (1) Los de differentiaal vergelijking

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 \\ \dot{x}_3 &= -x_4 \\ \dot{x}_4 &= 2x_1 + x_3\end{aligned}$$

op met beginvoorwaarden $x_1(0) = 1, x_2(0) = 2, x_3(0) = 0, x_4(0) = 3$.

- (2) Bereken
- e^{tA}
- met

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (3) Bereken
- e^{tA}
- met

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

III.2. De Jordan normaalvorm

Bij meer theoretische beschouwingen is het vaak handig om van een object een **normaalvorm** te hebben. Dat is een vorm waarin iets geschreven kan worden na een eventuele toegelaten transformatie. De normaalvorm voor een diagonaliseerbare matrix is bijvoorbeeld de resulterende diagonale matrix. Het mooiste is als de normaalvorm uniek is, maar als dat niet zo is, dan omschrijven we de nog toegelaten groep, in dit geval de permutatie groep van alle coördinaten $\mathfrak{S}_n$. Om een algemene matrix in normaalvorm te zetten hebben we dus nog een normaalvorm voor nilpotente matrices nodig.

Definitie III.2.1. Een matrix A heet *reducibel* indien de ruimte geschreven kan worden als de directe som van twee niet-triviale A -invariante deelruimten. Een matrix die niet reducibel is heet *irreducibel*.

Stelling III.2.2. Een irreducibele nilpotente matrix is equivalent met een matrix die uit nullen bestaat met enen op de bovendiaagonaal:

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Merk op dat de invariante ruimte opgespannen wordt door de vectoren

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, N \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, N^2 \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \dots,$$

waarbij we opmerken dat dit een eindige rij is omdat N nilpotent is. Zij nu N een nilpotente matrix die nog niet in normaalvorm staat. Dan kunnen we de beginvector(en) van deze rij berekenen door te kijken naar het orthogonale complement van het beeld van N . Dit levert ons een basis op waarin N in normaalvorm komt te staan.

In de irreducibele stukken van de gegeneraliseerde eigenruimte $\ker(A_\lambda - I)^\mu$ ziet A er nu uit als

$$(III.2.1) \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}.$$

De Jordan normaalvorm is nu van de vorm

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_k \end{bmatrix}$$

waarbij de $A_i, i = 1, \dots, k$ van de vorm (III.2.1) zijn. Bijvoorbeeld

$$\begin{bmatrix} 2+i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2+i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Opgaven voor §III.2.

- (1) Breng de volgende matrix in Jordan normaalvorm:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (2) Zij N een nilpotente matrix in $\mathbb{R}^4$. Wat zijn de mogelijke Jordan normaalvormen van N ?
- (3) Zij N een nilpotente matrix in $\mathbb{R}^n$. Gegeven zijn de getallen $\delta_k = \dim \ker N^k$ voor $k = 1, \dots, n-1$. Bepaal de dimensies van de irreducible ruimtes in termen van de δ_k 's.

Appendix 1: Ringen en lichamen

Definitie III.3.3. Een niet-lege verzameling R met een optelling (d.w.z. voor elke $a, b \in R$ bestaat $a + b \in R$) en een vermenigvuldiging (d.w.z. voor elke $a, b \in R$ bestaat $ab \in R$) heet een *ring* als als voldaan is aan:

- | | | |
|----|--|----------------------------------|
| R1 | $(a + b) + c = a + (b + c)$ | (associatieve wet voor $+$) |
| R2 | $0 + a = a$ | (nulelement) |
| R3 | $a + (-a) = 0$ | (tegengestelde) |
| R4 | $a + b = b + a$ | (commutatieve wet voor $+$) |
| R5 | $a(bc) = (ab)c$ | (associatieve wet voor $\cdot$) |
| R6 | $a(b + c) = ab + ac$
$(b + c)a = ba + ca$ | (distributieve wetten) |

Merk op dat R1 t/m R4 betekenen dat $(R, +)$ een *abelse groep* is.

Als er een element $1 \in R$ bestaat zò, dat

$$\text{R7} \quad 1 \cdot a = a \cdot 1$$

voor elke $a \in R$, dan heet R een *ring met eenheidselement*. Een ring R heet *commutatief* als

$$\text{Rb} \quad ab = ba$$

voor alle $a, b \in R$. We spreken van een *delingsring* als voldaan is aan R1 t/m R7, en bovendien aan

$$\begin{aligned} \text{R9} \quad & 1 \neq 0 \\ \text{R10} \quad & (\forall a \in R \setminus \{0\})(\exists a^{-1} \in R)(aa^{-1} = 1 = a^{-1}a). \end{aligned}$$

Definitie III.3.4. Een *lichaam* is een commutatieve delingsring.

Voorbeelden van lichamen zijn de rationale getallen $\mathbb{Q}$, de reële getallen $\mathbb{R}$ en de complexe getallen $\mathbb{C}$ (met de gebruikelijke optelling en vermenigvuldiging).

We zeggen dat een lichaam K *algebraïsch afgesloten* is als ieder polynoom $F(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ ($n \geq 0, a_i \in K$) ontbindbaar is in lineaire factoren; d.w.z. $F(X) = b_0 \cdot (b_1 - X) \cdot (b_2 - X) \cdot \dots \cdot (b_n - X)$, voor zekere $b_i \in K$. Het lichaam $\mathbb{C}$ is algebraïsch afgesloten (“Hoofdstelling van de Algebra”), maar $\mathbb{R}$ is dat niet (bezie het polynoom $F(X) = X^2 + 1$).

Appendix 2: Projectieoperatoren

Dit onderdeel behoort niet tot de tentamenstof.

Een alternatieve methode om de e -macht (of iedere andere gewenste functie) uit te rekenen is met behulp van projectieoperatoren. Het voordeel van deze methode is dat er voornamelijk gerekend wordt in rationale functies en dat een en ander gemakkelijk implementeerbaar is in een computeralgebra pakket. Een nadeel is dat bij handberekeningen de zaak weinig inzichtelijk is. Het is alleen formules invullen.

We beginnen met een matrix A en bepalen het karakteristieke polynoom $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$. We schrijven dit als

$$p(\lambda) = \prod_{\iota=1}^m (\lambda - \lambda_{\iota})^{\mu_{\iota}}.$$

Zij nu

$$f_{\kappa}(\lambda) = \prod_{\iota \neq \kappa} (\lambda - \lambda_{\iota})^{\mu_{\iota}}.$$

We berekenen vervolgens door breuksplitsing de coëfficiënten α_{ι}^j :

$$\frac{1}{p(\lambda)} = \sum_{\iota=1}^m \sum_{j=1}^{\mu_{\iota}} \frac{\alpha_{\iota}^j}{(\lambda - \lambda_{\iota})^j}.$$

Dan definiëren we functies $u_{\iota}(\lambda)$ door

$$u_{\iota}(\lambda) = \sum_{j=1}^{\mu_{\iota}} \alpha_{\iota}^j (\lambda - \lambda_{\iota})^{\mu_{\iota}-j}.$$

De vraag is nu natuurlijk waar dit allemaal goed voor is. Om te beginnen laten we zien dat

$$\begin{aligned}
\sum_{\iota}^m u_{\iota}(\lambda) f_{\iota}(\lambda) &= \\
&= \sum_{\iota}^m \sum_{j=1}^{\mu_{\iota}} \alpha_{\iota}^j (\lambda - \lambda_{\iota})^{\mu_{\iota}-j} \prod_{\kappa \neq \iota} (\lambda - \lambda_{\kappa})^{\mu_{\kappa}} \\
&= \sum_{\iota}^m \sum_{j=1}^{\mu_{\iota}} \frac{\alpha_{\iota}^j}{(\lambda - \lambda_{\iota})^j} \prod_{\kappa=1}^m (\lambda - \lambda_{\kappa})^{\mu_{\kappa}} \\
&= \frac{1}{p(\lambda)} \cdot p(\lambda) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

We definiëren nu de *projectieoperatoren*

$$E_{\iota} = u_{\iota}(A) f_{\iota}(A).$$

We weten al dat $\sum_{\iota=1}^m E_{\iota} = \sum_{\iota=1}^m u_{\iota}(A) f_{\iota}(A) = I$, de identiteit op $\mathbb{R}^n$. Als nu $\kappa \neq \iota$, dan geldt

$$\begin{aligned}
E_{\iota} E_{\kappa} &= u_{\iota}(A) f_{\iota}(A) u_{\kappa}(A) f_{\kappa}(A) = \\
&= \sum_{j=1}^{\mu_{\iota}} \alpha_{\iota}^j (A - \lambda_{\iota})^{\mu_{\iota}-j} \prod_{\sigma \neq \iota} (A - \lambda_{\sigma})^{\mu_{\sigma}} \sum_{j=1}^{\mu_{\kappa}} \alpha_{\kappa}^j (A - \lambda_{\kappa})^{\mu_{\kappa}-j} \prod_{\rho \neq \kappa} (A - \lambda_{\rho})^{\mu_{\rho}} \\
&= \sum_{j=1}^{\mu_{\iota}} \alpha_{\iota}^j (A - \lambda_{\iota})^{\mu_{\iota}-j} \prod_{\sigma} (A - \lambda_{\sigma})^{\mu_{\sigma}} \sum_{j=1}^{\mu_{\kappa}} \alpha_{\kappa}^j (A - \lambda_{\kappa})^{\mu_{\kappa}-j} \prod_{\rho \neq \kappa, \iota} (A - \lambda_{\rho})^{\mu_{\rho}} \\
&= \sum_{j=1}^{\mu_{\iota}} \alpha_{\iota}^j (A - \lambda_{\iota})^{\mu_{\iota}-j} p(A) \sum_{j=1}^{\mu_{\kappa}} \alpha_{\kappa}^j (A - \lambda_{\kappa})^{\mu_{\kappa}-j} \prod_{\rho \neq \kappa, \iota} (A - \lambda_{\rho})^{\mu_{\rho}} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

omdat A voldoet aan zijn eigen karakteristieke vergelijking (Cayley-Hamilton). Dit laatste is in te bewijzen als we weten dat de ruimte wordt opgespannen door de gegeneraliseerde eigenruimten van A (Ga na!).

Dan is

$$E_{\kappa}^2 = \sum_{\iota=1}^m E_{\iota} E_{\kappa} = I E_{\kappa} = E_{\kappa}.$$

Dus hebben we

$$E_{\kappa} E_{\iota} = \delta_{\kappa \iota} E_{\iota},$$

en zijn de $\{E_{\iota}\}_{\iota=1}^m$ inderdaad projectieoperatoren. Maar projectie waarop?

Lemma III.4.5. *Het beeld van E_{ι} is de kern van $(A - \lambda_{\iota})^{\mu_{\iota}}$, m.a.w. E_{ι} projecteert op de gegeneraliseerde eigenruimte behorende bij de eigenwaarde λ_{ι} .*

BEWIJS. Veronderstel dat $x \in \mathbb{R}^n$ in het beeld van E_ι zit. Dat wil zeggen dat er een $y \in \mathbb{R}^n$ is, zo dat $x = E_\iota y$. Dan geldt

$$\begin{aligned}
(A - \lambda_\iota I)^{\mu_\iota} x &= (A - \lambda_\iota I)^{\mu_\iota} u_\iota(A) f_\iota(A) y = \\
&= (A - \lambda_\iota I)^{\mu_\iota} \sum_{j=1}^{\mu_\iota} \alpha_\iota^j (A - \lambda_\iota)^{\mu_\iota-j} \prod_{\sigma \neq \iota} (A - \lambda_\sigma)^{\mu_\sigma} \\
&= \sum_{j=1}^{\mu_\iota} \alpha_\iota^j (A - \lambda_\iota)^{\mu_\iota-j} \prod_{\sigma} (A - \lambda_\sigma)^{\mu_\sigma} \\
&= \sum_{j=1}^{\mu_\iota} \alpha_\iota^j (A - \lambda_\iota)^{\mu_\iota-j} p(A) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Dus $x \in \text{Ker}(A - \lambda_\iota I)^{\mu_\iota}$.

Veronderstel nu dat $x \in \text{Ker}(A - \lambda_\iota I)^{\mu_\iota}$. Dan geldt

$$\begin{aligned}
0 &= (A - \lambda_\iota I)^{\mu_\iota} x \\
&= (A - \lambda_\iota I)^{\mu_\iota} \sum_{\kappa} E_\kappa x \\
&= (A - \lambda_\iota I)^{\mu_\iota} \sum_{\kappa \neq \iota} E_\kappa x
\end{aligned}$$

en dit impliceert dat $E_\kappa x = 0$ voor alle $\kappa \neq \iota$. M.a.w., $x = Ix = \sum_{\kappa} E_\kappa x = E_\iota x$. Dit betekent dat $x \in \text{Im } E_\iota$. $\square$

Als we nu definiëren $S = \sum_{\iota=1}^m \lambda_\iota E_\iota$, dan hebben we een operator die als volgt werkt op een element uit $\text{Ker}(A - \lambda_\iota I)^{\mu_\iota}$:

$$Sx = \sum_{\kappa=1}^m \lambda_\kappa E_\kappa x = \sum_{\kappa=1}^m \lambda_\kappa E_\kappa E_\iota x = \lambda_\iota x.$$

Deze operator is dus diagonaal op een basis van gegeneraliseerde eigenvectoren, en dus diagonaliseerbaar. We definiëren nu voor een $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gedefinieerd is op het spectrum van A de operator $f(A)$ als volgt:

$$f(A) = \sum_{\iota=1}^m f(\lambda_\iota) E_\iota.$$

In het bijzondere geval van de e -macht wordt dat

$$e^{tS} = \sum_{\iota=1}^m e^{t\lambda_\iota} E_\iota.$$

Een andere interessante formule (vgl. som II.6.7) is

$$(\mu I - A)^{-1} = \sum_{\iota=1}^m \frac{1}{\mu - \lambda_{\iota}} E_{\iota}.$$

We zien dat in dat geval $E_{\iota} = |u_{\iota}\rangle\langle u_{\iota}|$, in de door de natuurkundigen gebruikte bra-ket notatie.

De suggestie is nu dat S het diagonaliseerbare gedeelte van A is. Kunnen we laten zien dat $A - S$ nilpotent is? Op de ruimte $\text{Ker}(A - \lambda_{\iota} I)^{\mu_{\iota}} = \text{Im } E_{\iota}$ werkt $A - S$ als $A - \lambda_{\iota} I_{\text{Im } E_{\iota}}$ en dus is het resultaat 0 als we dat μ_{ι} keer herhalen. Dus mogen we concluderen dat $(A - S)^{\max_{\iota} \mu_{\iota}} = 0$. Verder zijn de E_{ι} per definitie polynomen in A , en kommuteren dus met A . Dus commuteert S met A en derhalve S met N . We hebben nu laten zien dat iedere $A \in G_n$.

Stelling III.4.6. *Iedere $n \times n$ -matrix A kan geschreven worden als*

$$A = S + N,$$

waarbij S diagonaliseerbaar is, N nilpotent en S en N kommuteren, d.w.z.

$$NS = SN.$$

Merk op dat als A zowel diagonaliseerbaar als nilpotent is, dan is $A = 0$.

Voorbeeld III.4.7. Zij A gegeven door

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Het karakteristieke polynoom is:

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda + i)^2(\lambda - i)^2.$$

Dus is

$$\begin{aligned} f_i(\lambda) &= (\lambda + i)^2, \\ f_{-i}(\lambda) &= (\lambda - i)^2. \end{aligned}$$

Verder is

$$\frac{1}{p(\lambda)} = -1/4 \frac{i}{(\lambda - i)} - 1/4 \frac{1}{(\lambda - i)^2} + 1/4 \frac{i}{(\lambda + i)} - 1/4 \frac{1}{(\lambda + i)^2}$$

or $\alpha_i^1 = -\frac{i}{4}$, $\alpha_i^2 = -\frac{1}{4}$, $\alpha_{-i}^1 = \frac{i}{4}$, $\alpha_{-i}^2 = -\frac{1}{4}$. Dus vinden we

$$\begin{aligned} u_i(\lambda) &= -\frac{i}{4}(\lambda - i) - \frac{1}{4} = -\frac{i}{4}\lambda - \frac{1}{2}, \\ u_{-i}(\lambda) &= \frac{i}{4}(\lambda + i) - \frac{1}{4} = \frac{i}{4}\lambda - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

We kunnen nu E_i en E_{-i} uitrekenen.

$$E_i = \begin{bmatrix} 1/2 & i/2 & 0 & 0 \\ -i/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -i/2 & 1/2 & i/2 \\ -i/2 & 0 & -i/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$E_{-i} = \begin{bmatrix} 1/2 & -i/2 & 0 & 0 \\ i/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & i/2 & 1/2 & -i/2 \\ i/2 & 0 & i/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Ga na dat inderdaad $E_i + E_{-i} = I$ en $iE_i - iE_{-i} = S$, met S als in voorbeeld III.1.4. Nu is dus

$$e^{tS} = e^{it}E_i + e^{-it}E_{-i} = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 & 0 \\ 0 & \sin(t) & \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & 0 & \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}.$$

De verdere berekening van e^{tA} is identiek aan die in voorbeeld III.1.4.

Opmerking III.4.8. Indien f een formele machtreeks ontwikkeling bezit, zouden we $f(A)$ kunnen definiëren als

$$f(tA) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) t^k A^k.$$

Ga na dat deze definitie overeenstemt met de formele machtreeks definitie van de e -macht. Als we dit doen dan volgt uit $A = \sum_{\iota=1}^m \lambda_{\iota} E_{\iota}$ dat

$$\begin{aligned} f(tA) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k f^{(k)}(0) A^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k f^{(k)}(0) \left(\sum_{\iota=1}^m \lambda_{\iota} E_{\iota} \right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k f^{(k)}(0) \sum_{\iota=1}^m \lambda_{\iota}^k E_{\iota}^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k f^{(k)}(0) \sum_{\iota=1}^m \lambda_{\iota}^k E_{\iota} \\ &= \sum_{\iota=1}^m f(\lambda_{\iota} t) E_{\iota}, \end{aligned}$$

waarbij de laatste gelijkheid alleen geldt als f convergeert voor $\lambda_i t$. Dus kunnen we zeggen dat $f(A)$ goed gedefiniëerd is als f gedefiniëerd op het spectrum van A . In dat geval stemmen de verschillende definities geheel met elkaar overeen.

Opgaven voor §III.4.

- (1) Bereken e^{tA} met

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (2) Voor welke waarden $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ zijn de volgende matrices diagonaliseerbaar?

$$(a) \begin{bmatrix} 0 & a \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, (b) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & b \end{bmatrix}, (c) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}, (d) \begin{bmatrix} 0 & d & 0 \\ 1 & 0 & d \\ d & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Index

- A^* , 36, 38
- abelse groep, 83
- afbeelding
 - geadjungeerde, 38
- afstand, 20, 50
- anti-lineair, 13
- coördinaat
 - t.o.v. basiselement, 25
- complement
 - orthogonaal, 49
- complex geconjugeerde, 12
 - van een matrix, 12
- delingsring, 83
- directe som, 43
- driehoeksongelijkheid, 20
 - omgekeerd, 27
- euclidische ruimte, 18
- Fouriercoëfficiënt
 - van v m.b.t. w , 22
- functionaal, 33
- geadjungeerde afbeelding, 38
- geadjungeerde matrix, 36
- geadjungeerde operator, 38
- gespiegelde
 - van een operator, 40
- Gram-Schmidt, 25
- Hermitisch product, 12
 - niet-gedegenereerd, 13
 - positief-definiet, 14
 - standaard, 14
- Hermitisch toegevoegde, 38
- i.p.ruimte, 18
- indefiniët
 - inwendig
 - product, 14
- inwendig
 - product, 14
- inwendig-product
 - functionaal, 34
- inwendig-productruimte, 18
- lengte
 - van een vector, 20
- lichaam, 9, 83
 - algebraïsch afgesloten, 83
- loodrecht, 14, 21
- matrix
 - geadjungeerde, 36
 - Hermitisch, 17, 37
 - orthogonaal, 61
 - positief definiet, 17
 - scheef Hermitisch, 42
 - unitair, 58
 - van een lineaire afbeelding, 25
 - zelfgeadjungeerd, 37
- metriek, 20
- norm
 - van een vector, 20
- ongelijkheid
 - van Bessel, 24
 - van Cauchy-Schwarz, 22
- operator
 - geadjungeerde, 38
 - gespiegelde, 40
 - Hermitisch, 38
 - orthogonaal, 61
 - positief definiet, 69
 - scheef Hermitisch, 42

- symmetrisch, 40
- unitair, 59
- zelfgeadjungeerd, 38
- orthogonaal
 - complement, 49
 - stelsel, 23
- orthogonale projectie, 50
- orthonormaal
 - stelsel, 23
- parallelogram-identiteit, 21
- polarisatieformule, 21
- product
 - Hermitisch, 12
 - niet-gedegenereerd, 13
 - Hermitsch
 - positief-definiet, 14
 - standaard, 14
 - inwendig
 - functionaal, 34
- projectie
 - orthogonaal, 50
 - van v langs w , 22
 - van V op H langs G , 45
- rangstelling, 30
- ring, 83
 - commutatief, 83
 - met eenheidselement, 83
- ruimte
 - euclidisch, 18
 - inwendig-product, 18
 - unitair, 18
- sesquilineaire vorm, 12
- som
 - directe som, 43
 - van lineaire deelruimten, 43
- Spectraalstelling
 - complexe, 65
 - reële, 68
- stelling
 - hoofdstelling van de lineaire algebra, 30
 - rang, 30
 - van Bessel, 24
 - van Cauchy-Schwarz, 22
 - van Pythagoras, 21
- unitaire ruimte, 18
- vectorruimte
 - complex, 10
 - over het lichaam K , 9
 - reël, 10
 - van polynomen, 11