

1. Merk op dat

$$\langle x, y \rangle = 2x_1\bar{y}_1 + (1+i)x_1\bar{y}_2 + (1-i)x_2\bar{y}_1 + 3x_2\bar{y}_2 = x^T A \bar{y},$$

waarbij

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix}.$$

De matrix A is Hermitisch ($A = A^*$) en dus is volgens Stelling I.2.13 $\langle x, y \rangle$ een Hermitisch product. Blijft nog positief definit aan te tonen. Welnu

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle &= 2x_1\bar{x}_1 + (1+i)x_1\bar{x}_2 + (1-i)x_2\bar{x}_1 + 3x_2\bar{x}_2 \\ &= 2\left((x_1 + \frac{1-i}{2}x_2)\overline{(x_1 + \frac{1-i}{2}x_2)} + x_2\bar{x}_2\right) \\ &= 2|x_1 + \frac{1-i}{2}x_2|^2 + 2|x_2|^2. \end{aligned}$$

Dus $\langle x, x \rangle$ is groter dan of gelijk aan 0 en alleen 0 als $x = 0$. We besluiten dat $\langle x, y \rangle$ een inwendig product is. (Alternatief: toon aan dat de eigenwaarden van A beide positief zijn, namelijk 1 en 4. Zie verder Lay Hoofdstuk 7.)

2. (a) Bereken $\langle T(v), w \rangle = \langle \sum_{i=1}^k \langle v, v_i \rangle w_i, w \rangle = \sum_{i=1}^k \langle v, v_i \rangle \langle w_i, w \rangle = \langle v, \sum_{i=1}^k \langle w_i, w \rangle v_i \rangle = \langle v, \sum_{i=1}^k \langle w, w_i \rangle v_i \rangle$. Dus voor alle $v \in V$ geldt dat $\langle v, T^*(w) \rangle = \langle v, \sum_{i=1}^k \langle w, w_i \rangle v_i \rangle$. Dus $T^*(w) = \sum_{i=1}^k \langle w, w_i \rangle v_i$.
- (b) Als $v \in \text{Span}\{v_1, \dots, v_k\}^\perp$ dan is $\langle v, v_i \rangle = 0$ ($i = 1 \dots, k$). Dus $T(v) = 0$ en dus $v \in \text{Ker } T$. Dus $\text{Ker } T \supset (\text{Span}\{v_1, \dots, v_k\})^\perp$.
- (c) Omdat iedere voor iedere $v \in V$ het beeld $T(v)$ een lineaire combinatie is van $w_1, \dots, w_k$ is $\text{Im } T \subset \text{Span}\{w_1, \dots, w_k\}$.
- (d) Neem $V = W = \mathbb{C}^2$. Neem $v_1 = w_2 = 0$ en $v_2 = w_1 = e_1 (\neq 0)$. Dan $T(v) = \langle v, v_1 \rangle w_1 + \langle v, v_2 \rangle w_2 = 0$ voor iedere v . Dus $\text{Ker } T = \mathbb{C}^2 \neq (\text{Span}\{v_1, v_2\})^\perp$ en $\text{Im } T = \{0\} \neq \text{Span}\{w_1, w_2\}$.
3. (a) Daar $S^* = (T^*T)^* = T^*(T^*)^* = T^*T = S$, is $S : V \rightarrow V$ zelfgeadjungeerd. De Spectraalstelling zegt nu dat er een orthonormale basis $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_n\}$ voor V is die uit eigenvectoren van S bestaat.
- (b) Volgens Lemma II.6.1 is iedere eigenwaarde van S reëel. Stel $Sx = \lambda x$ met $x \neq 0$. Dan

$$\lambda \langle x, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \langle Sx, x \rangle = \langle T^*Tx, x \rangle = \langle Tx, Tx \rangle \geq 0.$$

Daar $\langle x, x \rangle > 0$ volgt $\lambda \geq 0$.

- (c) Volgens Stelling I.2.10 is $\langle x, y \rangle = ([x]_{\mathcal{U}})^T F \overline{[y]_{\mathcal{U}}}$, waarbij $F = [\langle u_i, u_j \rangle]_{i,j=1}^n$. Daar $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_n\}$ orthonormaal is, volgt $F = I_n$, en $\langle x, y \rangle = ([x]_{\mathcal{U}})^T \overline{[y]_{\mathcal{U}}}$.

(d) We weten dat $Su_j = \lambda_j u_j$ met $\lambda_j \geq 0$. Dus als $x = \sum_{i=1}^n x_i u_i$ dan $Sx = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i u_i$. Dan $\langle x, Sx \rangle = \langle \sum_{i=1}^n x_i u_i, \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j u_j \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \bar{x}_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i|^2$. We gebruiken hier dat alle λ_i reëel en niet negatief zijn. Verder $\sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i|^2 \leq s \sum_{i=1}^n |x_i|^2$ omdat alle eigenwaarden van S ten hoogste s zijn. We vinden $\langle x, Sx \rangle \leq s \langle x, x \rangle$, waarbij s de grootste eigenwaarde is van S .

4. (a) De getallen 1 en -2 zijn eigenwaarden van A en daar de som van de eigenwaarden -3 is, heeft de eigenwaarde -2 de multipliciteit 2.

We berekenen de nulruimte van

$$A - I = \begin{bmatrix} 10 & 13 & -7 \\ -7 & -10 & 4 \\ 6 & 6 & -6 \end{bmatrix}$$

en vinden dat die wordt opgespannen door $(2, -1, 1)$.

We berekenen de nulruimte van

$$(A + 2I)^2 = \begin{bmatrix} 13 & 13 & -7 \\ -7 & -7 & 4 \\ 6 & 6 & -3 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 36 & 36 & -18 \\ -18 & -18 & 9 \\ 18 & 18 & -9 \end{bmatrix},$$

en vinden dat die wordt opgespannen door $(-1, 1, 0)$ en $(1, 0, 2)$.

Kies nu

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

dan

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad S = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & 12 & -6 \\ -6 & -8 & 3 \\ 6 & 6 & -5 \end{bmatrix}.$$

We vinden voor

$$N = A - S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Inderdaad $N^2 = 0$ en

$$N * S = S * N = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (b) Allereerst is $e^{tA} = e^{tS} e^{tN}$.

$$e^{tN} = I + tN = \begin{bmatrix} 1+t & t & -t \\ -t & 1-t & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Verder

$$e^{tS} = P \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 4e^t - 3e^{-2t} & 4e^t - 4e^{-2t} & -2e^t + 2e^{-2t} \\ -2e^t + 2e^{-2t} & -2e^t + 3e^{-2t} & e^t - e^{-2t} \\ 2e^t - 2e^{-2t} & 2e^t - 2e^{-2t} & -e^t + 2e^{-2t} \end{bmatrix}.$$