
Normering:

$$\begin{array}{cccc} 1 : 5 & ; & 2a : 4 & ; & 3a : 2 & ; & 4a : 7 & ; \\ & & b : 3 & ; & b : 3 & ; & b : 3 & ; \\ & & c : 1 & ; & c : 3 & ; & & \\ & & d : 2 & ; & d : 3 & . & & \end{array}$$

$$\text{Eindcijfer} = 1 + \frac{\text{totaal}}{4}.$$

1. Op de vectorruimte $\mathbb{C}^2$ definiëren we voor alle $x, y \in \mathbb{C}^2$

$$\langle x, y \rangle = 2x_1\bar{y}_1 + (1+i)x_1\bar{y}_2 + (1-i)x_2\bar{y}_1 + 3x_2\bar{y}_2.$$

Toon aan dat $\langle x, y \rangle$ een inwendig product is.

2. V en W zijn unitaire ruimtes en $\{v_1, \dots, v_k\} \subset V$ en $\{w_1, \dots, w_k\} \subset W$. We definiëren de lineaire afbeelding $T : V \rightarrow W$ door $T(v) = \sum_{i=1}^k \langle v, v_i \rangle w_i$.

- (a) Bepaal $T^*(w)$ voor iedere $w \in W$.
- (b) Toon aan dat $\text{Ker } T \supset (\text{Span}\{v_1, \dots, v_k\})^\perp$.
- (c) Toon aan dat $\text{Im } T \subset \text{Span}\{w_1, \dots, w_k\}$.
- (d) Laat door voorbeelden zien dat bij de onderdelen (b) en (c) in het algemeen geen gelijkheid geldt.

3. V en W zijn unitaire ruimtes en $T : V \rightarrow W$ is een lineaire afbeelding. Zij $S = T^*T$.

- (a) Toon aan dat er een orthonormale basis voor V is die uit eigenvectoren van S bestaat.

We noemen die basis verder $\mathcal{U}$.

- (b) Toon aan dat de eigenwaarden van S reëel en niet-negatief zijn.
- (c) Noteer voor een vector $x \in V$ de coördinaatvector ten opzichte van $\mathcal{U}$ als $[x]_{\mathcal{U}}$. Toon aan dat voor iedere $x, y \in V$ geldt $\langle x, y \rangle = ([x]_{\mathcal{U}})^T \overline{[y]_{\mathcal{U}}}$.
- (d) Toon aan dat voor iedere $x \in V$ geldt $\langle x, Sx \rangle \leq s \langle x, x \rangle$, waarbij s de grootste eigenwaarde is van S .

Hint: Gebruik de vorige onderdelen.

Z.O.Z.

4. Zij

$$A = \begin{bmatrix} 11 & 13 & -7 \\ -7 & -9 & 4 \\ 6 & 6 & -5 \end{bmatrix}.$$

De getallen 1 en -2 zijn eigenwaarden van A .

- (a) Bereken een diagonaliseerbare matrix S en een nilpotente matrix N die zo zijn dat $A = S + N$ en $SN = NS$.
- (b) Bereken e^{tS} , e^{tN} en druk e^{tA} uit in e^{tS} en e^{tN} .