

Normering:

$$\begin{aligned} 1a : 3 & ; \quad 2a : 3 & ; \quad 3a : 3 & ; \quad 4a : 8 & ; \\ b : 3 & ; \quad b : 4 & ; \quad b : 2 & ; \quad b : 5 & ; \\ c : 2 & ; \\ d : 3 & ; \end{aligned}$$

$$\text{Eindcijfer} = 1 + \frac{\text{totaal}}{4}$$

1. Zij $n > m$ natuurlijke getallen. Gegeven is de complexe $n \times m$ matrix B die rang m heeft. Zij $A = B^T \bar{B}$. (Hierbij is B^T de getransponeerde van B en is $\bar{B}$ de matrix waarvan ieder element de complex geconjugeerde is van het overeenkomstige element van B .) Voor iedere $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^m$ definiëren we

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_A = \mathbf{v}^T A \bar{\mathbf{w}}.$$

- (a) Toon aan dat $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ een Hermitisch product op $\mathbb{C}^m$ definieert.
(b) Toon aan dat $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ positief definit is.
2. Zij V de 10-dimensionale reële vectorruimte bestaande uit alle functies f op $[0, 2]$ die de vorm

$$f(t) = \sum_{k=0}^5 a_k \cos k\pi t + \sum_{\ell=1}^4 p_\ell t^\ell,$$

hebben, waarbij $a_0, \dots, a_5, p_1, \dots, p_4$ reële getallen zijn. Op V is het inwendig product gedefinieerd door

$$\langle f, g \rangle = \int_0^2 f(t)g(t)dt.$$

Zij W de deelruimte van V van alle functies g van de vorm

$$g(t) = \sum_{k=0}^5 a_k \cos k\pi t.$$

- (a) Toon aan dat $\mathcal{U} = \{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos \pi t, \cos 2\pi t, \cos 3\pi t, \cos 4\pi t, \cos 5\pi t\}$ een orthonormale basis is voor W .

Hint: Het is nuttig te weten dat $\cos \phi \cos \psi = \frac{1}{2}(\cos(\phi + \psi) + \cos(\phi - \psi))$.

- (b) Zij $h(t) = (t - 1)^2$. Bepaal het element $\hat{h}$ in W dat het dichtst bij h ligt. Het volstaat de waarden van de coëfficiënten $a_0, \dots, a_5$ in

$$\hat{h}(t) = a_0 \frac{1}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^5 a_k \cos k\pi t$$

te bepalen.

Z.O.Z.

(c) Toon aan dat $\sum_{k=0}^5 a_k^2 \leq \frac{2}{5}$, waarbij $a_0, \dots, a_5$ de bij het vorige onderdeel gevonden waarden zijn.

(d) Zij $T : W \rightarrow W$ gegeven door $Tf = f''$, de tweede afgeleide van f . Toon aan dat de operator T op W zelfgeadjungeerd is.

Hint: denk aan partieel integreren.

3. Zij V de vectorruimte bestaande uit alle periodieke functies $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ van de vorm

$$f(t) = \sum_{k=1}^5 a_k e^{2k\pi i t},$$

waarbij $a_1, \dots, a_5$ complexe getallen zijn. Merk op dat $f(t+1) = f(t)$ voor iedere waarde van t . Op V is het inwendig product gedefinieerd door

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Zij $T : V \rightarrow V$ gegeven door $Tf(t) = f(t + \frac{1}{2})$.

(a) Bewijs dat $\|Tf\| = \|f\|$.

(b) Bewijs of weerleg: T is unitair.

4. Zij

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Gegeven is dat de enige eigenwaarden van A (afgezien van multipliciteiten) de getallen -1 en 1 zijn.

(a) Bereken een diagonaliseerbare matrix S en een nilpotente matrix N zo dat $A = S + N$ en $SN = NS$.

(b) Bereken e^{tS} , e^{tN} en druk e^{tA} uit in e^{tS} en e^{tN} .