

1. (a) Voor $k \neq j$ is $\langle b_k, b_j \rangle = \int_0^{2\pi} b_k(t) \overline{b_j(t)} dt = \int_0^{2\pi} e^{i(k-3)t} e^{-i(j-3)t} dt = \int_0^{2\pi} e^{i(k-j)t} dt = \left[\frac{e^{i(k-j)t}}{i(k-j)} \right]_0^{2\pi} = 0$. Het stelsel $\mathcal{B}$ is dus orthogonaal en de elementen zijn ongelijk aan 0. Verder spant $\mathcal{B}$ de ruimte V op. Dus $\mathcal{B}$ is een orthogonale basis voor V .
- (b) Kies $u_k = \frac{1}{\|b_k\|} b_k$. Dan is het stelsel $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_5\}$ orthonormaal. We berekenen voor iedere k dat $\|b_k\|^2 = \langle b_k, b_k \rangle = \int_0^{2\pi} e^{i(0)t} dt = 2\pi$. Dus $\|b_k\| = \sqrt{2\pi}$.
- (c) $f(t) = \frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2}e^{-it} = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}u_2 + \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}u_4$. Dus $\|f\|^2 = (\frac{1}{2}\sqrt{2\pi})^2 + (\frac{1}{2}\sqrt{2\pi})^2 = \pi$. We vinden $\|f\| = \sqrt{\pi}$.
- (d) Merk op dat $Db_k = i(k-3)b_k$. Dus voor $k = 1, \dots, 5$ vinden we dat $i(k-3)$ een eigenwaarde is met bijbehorende eigenvector b_k . Omdat we vijf verschillende eigenwaarden vinden, hebben we alle eigenwaarden.
- (e) Met partiële integreren: $\langle Df, g \rangle = \int_0^{2\pi} f'(t) \overline{g(t)} dt = [f(t) \overline{g(t)}]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g'(t)} dt = -\langle f, Dg \rangle = \langle f, -Dg \rangle$ voor iedere f en g . Dus D^* is gelijk aan $-D$.

2. Daar voor een projectie $P = P^2$ volgt dat $P = P^n$ voor iedere $n \geq 1$. We berekenen nu

$$e^{tP} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} P^k = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} P = I + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \right) P = I + (e^t - 1)P = (I - P) + e^t P.$$

3. (a) $A^* = (\sum_{k=1}^n \lambda_k u_k u_k^*)^* = \sum_{k=1}^n (\lambda_k u_k u_k^*)^* = \sum_{k=1}^n \overline{\lambda_k} (u_k u_k^*)^*$. Gebruik nu dat λ_k reëel is en dat $(u_k u_k^*)^* = (u_k^*)^* u_k^* = u_k u_k^*$ om te zien dat $A^* = \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k u_k^* = A$. We hebben bewezen dat A zelfgeadjungeerd is.
- (b) Schrijf $U = [u_1 \cdots u_n]$ en D de diagonaalmatrix met diagonaalelementen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Dan

$$UDU^* = [u_1 \cdots u_n] D \begin{bmatrix} u_1^* \\ \vdots \\ u_n^* \end{bmatrix} = [\lambda_1 u_1 \cdots \lambda_n u_n] \begin{bmatrix} u_1^* \\ \vdots \\ u_n^* \end{bmatrix} = A.$$

Omdat ook $U^{-1} = U^*$ zien we dat $AU = UD$. Dus de diagonaalelementen van D zijn de eigenwaarden van A en de kolommen van U de bijbehorende eigenvectoren.

4. (a) De som van de diagonaalelementen is de som van de eigenwaarden. We weten dat 0 en 2 de enige eigenwaarden zijn. De som van de eigenwaarden is 4 en dus hebben 0 en 2 ieder multiplicitéit 2.
We bepalen een basis voor de nulruimte van A^2 .

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ -4 & -4 & -8 & -8 \\ 4 & 4 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De nulruimte van A^2 wordt opgespannen door de vectoren $(1, -1, 0, 0)$ en $(0, 0, 1, -1)$. Verder bekijken we

$$(A - 2I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -4 & -4 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

We zien dat de nulruimte wordt opgespannen door $(1, 0, 0, 0)$ en $(0, 1, -1, 0)$. Kies dus de matrix

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

We berekenen P^{-1} door

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Na verwisselen van rijen vinden we dat

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Dan

$$S = P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} P^{-1} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vervolgens vinden we

$$N = A - S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Controleer dat inderdaad $N^2 = 0$!

(b)

$$e^{tN} = I + tN = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -t & 1-t & -t & -t \\ t & 0 & 1 & 0 \\ 0 & t & t & 1+t \end{bmatrix}.$$

en

$$e^{tS} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & e^{2t} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & e^{2t} \\ 0 & 1 & 0 & -e^{2t} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} e^{2t} & -1 + e^{2t} & -1 + e^{2t} & -1 + e^{2t} \\ 0 & 1 & 1 - e^{2t} & 1 - e^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} & -1 + e^{2t} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tenslotte is $e^{tA} = e^{tN} e^{tS}$.