
Normering:

$1a : 3$; $2a : 6$; $3a : 2$; $4a : 7$;
 $b : 2$; ; $b : 4$; $b : 5$;
 $c : 2$;
 $d : 3$;
 $e : 2$.

Eindcijfer = $1 + \frac{\text{totaal}}{4}$.

1. Zij V de vectorruimte bestaande uit alle complexwaardige functies $f(t)$ op $[0, 2\pi]$ die de vorm

$$f(t) = \sum_{k=-2}^2 \hat{f}_k e^{ikt}$$

hebben, waarbij $\hat{f}_{-2}, \dots, \hat{f}_2$ complexe getallen zijn. Op V is het inwendig product gedefinieerd door

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Zij $D : V \rightarrow V$ gedefinieerd door aan een functie f zijn afgeleide toe te voegen, met andere woorden $D(f) = \frac{df}{dt}$.

- (a) Toon aan dat $\mathcal{B} = \{b_1(t), b_2(t), \dots, b_5(t)\}$, waarbij $b_k(t) = e^{i(k-3)t}$, een orthogonale basis is voor V .
- (b) Bepaal een orthonormale basis $\mathcal{U}$ voor V .
- (c) Zij $f(t) = \cos(t)$. Schrijf f als combinatie van de vectoren uit $\mathcal{U}$ **en** bereken $\|f\|$.
- (d) Bepaal de eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren van D .
Hint: Wat is Db_k ?
- (e) Bewijs dat de geadjungeerde D^* van D gelijk is aan $-D$.
Hint: denk aan partieel integreren of gebruik $[D]_{\mathcal{U}}$.

2. Zij $P : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ een projectie. Bewijs dat $e^{tP} = (I - P) + e^t P$.

Hint: Wat is P^n als P een projectie is?

Z.O.Z.

3. Zij $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_n\}$ een orthonormale basis van $\mathbb{C}^n$ en $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ verschillende reële getallen. Zij A de $n \times n$ matrix die gegeven wordt door $A = \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k u_k^*$.

(a) Toon aan dat A zelfgeadjungeerd is.

(b) Bepaal de eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren van A .

4. Zij

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Gegeven is dat de eigenwaarden van A de getallen 0 en 2 zijn.

(a) Bereken een diagonaliseerbare matrix S en een nilpotente matrix N zo dat $A = S + N$ en $SN = NS$.

(b) Bereken e^{tS} , e^{tN} en druk e^{tA} uit in e^{tS} en e^{tN} .