

Normering:

$$\begin{array}{lll} 1a : 3 & ; & 2a : 2 & ; & 3a : 7 & ; \\ b : 2 & ; & b : 3 & ; & b : 5 & ; \\ c : 4 & ; & c : 4 & ; & & \\ d : 3 & ; & d : 3 & ; & & \end{array}$$

$$\text{Eindcijfer} = 1 + \frac{\text{totaal}}{4}.$$

1. Zij de complexe matrix A en de complexe vectoren u_1 en u_2 gegeven door

$$A = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 & 8 & -10i \\ 8 & 11 & 2i \\ 10i & -2i & 2 \end{bmatrix}, \quad u_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -i \\ 2i \\ 2 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2i \\ -2i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De ruimte $\mathbb{C}^3$ is voorzien van het standaard inwendige product.

- (a) Toon aan dat er een orthonormale basis van eigenvectoren van A voor $\mathbb{C}^3$ bestaat.
- (b) Toon aan dat $\{u_1, u_2\}$ een orthonormaal stelsel is.
- (c) Gegeven is dat u_1 en u_2 eigenvectoren van A zijn met eigenwaarden 1, respectievelijk 2. Bepaal nu een unitaire matrix U en een diagonaalmatrix D zo dat $AU = UD$.
- (d) Bepaal de matrix van de orthogonale projectie van $\mathbb{C}^3$ op de ruimte opgespannen door u_1 en u_2 .

Z.O.Z.

2. Zij $w(t) = 2 + \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$. We geven dat

$$\int_0^{2\pi} e^{int} w(t) dt = \begin{cases} 4\pi, & n = 0 \\ \pi, & n = 1 \text{ of } n = -1 \\ 0, & \text{anders.} \end{cases}$$

Zij V de tweedimensionale ruimte van alle functies $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ van de vorm $f(t) = a_1 e^{it} + a_2 e^{2it}$ en zij het inwendige product op V gegeven door

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} w(t) dt.$$

De afbeelding $T : V \rightarrow V$ wordt gegeven door $T(a_1 e^{it} + a_2 e^{2it}) = a_1 e^{it} + 2a_2 e^{2it}$.

- (a) Bepaal de matrix van T ten opzichte van de basis $\{e^{it}, e^{2it}\}$ van V .
- (b) Bepaal een orthonormale basis $\mathcal{U}$ van V .
- (c) Bepaal de matrix $[T]_{\mathcal{U}}$ van T ten opzichte van $\mathcal{U}$.
- (d) Bepaal $T^*(e^{it})$, waarbij T^* de de geadjungeerde van T is.

3. Zij

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -13 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Gegeven is dat de eigenwaarden van A de getallen -2 en 1 zijn. Een eigenvector bij de eigenwaarde -2 is $(-1, 1, -2)$.

- (a) Bereken een diagonaliseerbare matrix S en een nilpotente matrix N zo dat $N = A - S$ en $SN = NS$.
- (b) Bereken e^{tS} , e^{tN} en geef aan hoe e^{tA} uit e^{tS} en e^{tN} kan worden berekend.