
Normering:

$$\begin{array}{llll} 1a : 3 & ; & 2a : 1 & ; & 3a : 2 & ; & 4a : 7 & ; \\ b : 4 & ; & b : 1 & ; & b : 4 & ; & b : 5 & . \\ c : 3 & ; & c : 1 & ; & & & & \\ d : 3 & ; & d : 2 & ; & & & & \end{array}$$

$$\text{Eindcijfer} = 1 + \frac{\text{totaal}}{4}.$$

1. Zij $V = \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ met het Hermitische product

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p''(t)q''(t)dt + p(0)q(0) + p'(0)q'(0),$$

waarbij $f'(t)$ en $f''(t)$ voor de eerste en tweede afgeleide van $f(t)$ staan.

- (a) Toon aan dat het Hermitische product $\langle p, q \rangle$ positief definit is en dus dat V daarmee een Euclidische ruimte is.
- (b) Bepaal een orthonormale basis $\mathcal{U}$ van V .
- (c) Zij de lineaire transformatie $D : V \rightarrow V$ gegeven door

$$D(p(t)) = \frac{p(t) - p(0)}{t}.$$

Bepaal de matrix $[D]_{\mathcal{U}}$ van D ten opzichte van $\mathcal{U}$.

- (d) Bepaal de matrix van de geadjungeerde D^* van D en bepaal hiermee $D^*(t + 2t^2)$.
2. Zij V en W eindig dimensionale vectorruimten met $\dim V = n$ en $\dim W = m$. Zij $T : V \rightarrow W$ en $S : W \rightarrow V$ lineaire transformaties. Gegeven is dat de compositie $T \circ S : W \rightarrow W$ inverteerbaar is.
- (a) Toon aan dat $\dim \text{Im } (T \circ S) \leq \dim \text{Im } S$.
 - (b) Leidt uit onderdeel (a) af dat $\dim \text{Im } S \geq m$.
 - (c) Toon aan dat $\dim \text{Im } S = m$ en bereken $\dim \text{Ker } S$.
 - (d) Zij $P = S \circ (T \circ S)^{-1} \circ T$. Toon aan dat P een projectie is.

Z.O.Z.

3. Gegeven is de matrix

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

- (a) Toon aan dat P de matrix van een orthogonale projectie is van $\mathbb{C}^4$ met het standaard inwendig product.
- (b) Bepaal $\text{Ker } P$, $\text{Im } P$, $\text{Ker } (I - P)$ en $\text{Im } (I - P)$.

4. Zij

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 4 \\ -3 & -1 & 3 \\ -4 & -3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Gegeven is dat de eigenwaarden van A de getallen -1 en 2 zijn, en de bijbehorende eigenruimten worden opgespannen door respectievelijk $(1, 1, 1)$ en $(1, 0, 1)$.

- (a) Bereken een diagonaliseerbare matrix S en een nilpotente matrix N zo dat $N = A - S$ en $SN = NS$.
- (b) Bereken e^{tS} , e^{tN} en druk e^{tA} uit in e^{tS} en e^{tN} .