

1. Zij T een lineaire operator op $\mathbb{R}^4$ met matrix (op de standaardbasis van $\mathbb{R}^4$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Formuleer de rangstelling.
 - b) Wat is de rang van de matrix van T ?
 - c) Wat is de dimensie van de kern van T ?
 - d) Wat is de dimensie van het beeld van T ?
2. Zij V een unitaire ruimte en $T : V \rightarrow V$ een zelfgeadjungeerde operator. Zij $\{u_1, \dots, u_n\}$ een orthonormale basis van V bestaande uit eigenvectoren van T met bijbehorende eigenwaarden $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Zij P_i de orthogonale projectie op u_i , $i = 1, \dots, n$.
- a) Is $\sum_{i=1}^n P_i = id_V$?
 - b) Is $\sum_{i=1}^n \lambda_i P_i = T$?
 - c) Druk T^k , $k \in \mathbb{N}$, uit in termen van de λ_i en de P_i .
 - d) Zij $f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$ een reeks die convergeert op $\mathbb{R}$. Wat is nu een geschikte definitie voor $f(T)$ die overeenkomt met de voorgaande bevindingen voor het geval $f(\lambda) = 1$, $f(\lambda) = \lambda$ en $f(\lambda) = \lambda^k$?
 - e) Definieer $\sqrt{T}$ op analoge wijze, onder geschikte voorwaarden.
 - f) Is de definitie van e^T in overeenstemming met de gebruikelijke definitie van de exp van een operator?

3. Zij

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Bepaal de decompositie $A = S + N$ in een commuterend semisimple gedeelte S en een nilpotent gedeelte N .
- b) Los de differentiaalvergelijking

$$\dot{x} = Ax$$

op door e^{tA} uit te rekenen.

Z.O.Z.

Normering:

1 : a) 8 b) 7 c) 8 d) 7 + — 30	2 : a) 5 b) 5 c) 5 d) 5 e) 5 f) 5 + — 30	3 : a) 15 b) 15 + — 30
---	---	---

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\text{Totaal}}{10} + 1.$$