

1. a) Geef een voorbeeld van een vectorruimte V en een lineaire afbeelding $A : V \rightarrow V$ zo dat $\text{im } A = \ker A$.
b) Bestaat er zo'n voorbeeld onder de restrictie dat $\dim V = 5$?
2. Zij V een unitaire ruimte en $T : V \rightarrow V$ een zelfgeadjungeerde operator. Zij $\{u_1, \dots, u_n\}$ een orthonormale basis van V bestaande uit eigenvectoren van T met bijbehorende eigenwaarden $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Zij $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ een functie. We definiëren nu $f(T) : V \rightarrow V$ als

$$f(T)y = \sum_{k=1}^n f(\lambda_k) \langle y, u_k \rangle u_k, \quad y \in V.$$

- a) Laat zien dat $f(T)$ een goed gedefinieerde lineaire afbeelding is.
 - b) Bewijs dat $\frac{d}{dt} e^{tT} = T e^{tT}$.
 - c) Zij $P_k y = \langle y, u_k \rangle u_k$. Laat zien dat $P_k P_l = \delta_{kl} P_k$, waar $\delta_{kl} = 1$ als $k = l$ en 0 als $k \neq l$.
3. Zij

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Bepaal de decompositie $A = S + N$ in een commuterend semisimple gedeelte S en een nilpotent gedeelte N .
- b) Los de differentiaalvergelijking

$$\dot{x} = Ax$$

op door e^{tA} uit te rekenen.

Normering:

1 :	a)	20	2 :	a)	10	3 :	a)	15
	b)	10		b)	10		b)	15
				c)	10			
+	—		+	—		+	—	
	30			30			30	

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\text{Totaal}}{10} + 1.$$