



Tentamen Voortgezette Lineaire Algebra (WD324)
 vrijdag 5 april 2002; 13:30 – 15:30 uur.

Dit tentamen bestaat uit vier opgaven

1. Gegeven is het inwendige product $\langle \cdot, \cdot \rangle$, gedefinieerd op $\mathbb{C}^2$:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 3x_1\overline{y_1} + ix_1\overline{y_2} - ix_2\overline{y_1} + 3x_2\overline{y_2}.$$

- (6) a. Ga na dat $\langle \cdot, \cdot \rangle$ inderdaad positief definit is.
 (6) b. Bepaal een zelfgeadjungeerde matrix A zó dat $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ te schrijven is als $\mathbf{y}^* A \mathbf{x}$ (let op de volgorde!).
 (7) c. Bereken de eigenvectoren $\mathbf{x}_1$ en $\mathbf{x}_2$ van A .
 (7) d. Zij T een operator op $\mathbb{C}^2$, met matrix M (ten opzichte van de gewone basis). Toon aan: T is zelfgeadjungeerd ten opzichte van $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dan en slechts dan als $AM = M^*A$.
 (7) e. Zij P de gewone loodrechte projectie op de x -as van $\mathbb{C}^2$. Is P zelfgeadjungeerd ten opzichte van het gegeven inwendig product $\langle \cdot, \cdot \rangle$? Leg uit waarom (niet)?
 (7) f. Zij Q de gewone loodrechte projectie op lijn door $(0,0)$ en $\mathbf{x}_1$. Is Q zelfgeadjungeerd ten opzichte van het gegeven inwendig product $\langle \cdot, \cdot \rangle$? Leg uit waarom (niet)?

2. Zij V_2 de ruimte van alle polynomen met complexe coëfficiënten van graad ten hoogste 2 en voorzien van het inwendig product

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)\overline{q(t)} dt.$$

Definieer de differentiatieoperator $D : V_2 \rightarrow V_2$ door $Dp = p'$.

- (6) a. Bepaal de dimensies van $\text{Ker } D$ en $\text{Im } D$.
 (7) b. Toon aan dat D niet zelfgeadjungeerd is. Is D^* injectief?
 (7) c. Zij $q \in V_2$ het constante polynoom met waarde 1. Toon aan $D^*(q)(t) = -6 + 12t$.
 (15) 3. De volgende kwadratische vergelijking bepaalt een kwadriek in $\mathbb{R}^3$:

$$5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3 + 8x_3^2 + 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0.$$

Bepaal van deze kwadriek het middelpunt, de asrichtingen en de aslengten. Met wat voor oppervlak hebben we te maken? NB Om wat rekenwerk te besparen: 9 is een tweevoudige eigenwaarde van de bijbehorende matrix.

- (15) 4. Gegeven is een functionaal L op een unitaire ruimte V . Toon aan dat er één $\mathbf{w} \in V$ is zó dat $L = L_{\mathbf{w}}$. Doe dit door een willekeurige basis $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ voor V te nemen en te laten zien dat er één w is met $L\mathbf{v}_i = \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{w} \rangle$ voor alle i . *Aanwijzing:* schrijf $\mathbf{w}$ als lineaire combinatie van basisvectoren en stel een stelsel vergelijkingen voor de coëfficiënten op.

De waardering voor elke vraag staat in de kantlijn; het cijfer wordt berekend volgens de formule

$$\text{Cijfer} = \frac{\text{Totaal} + 10}{10}$$

en op de gebruikelijke wijze afgerond.

EINDE