

1. Gegeven is het inwendige product $\langle \cdot, \cdot \rangle$, gedefinieerd op $\mathbb{C}^2$:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 2x_1\overline{y_1} + ix_1\overline{y_2} - ix_2\overline{y_1} + 3x_2\overline{y_2}.$$

- (5) a. Ga na dat $\langle \cdot, \cdot \rangle$ inderdaad positief definit is.
- (5) b. Bepaal een zelfgeadjungeerde matrix A zó dat $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ te schrijven is als $\mathbf{y}^* A \mathbf{x}$ (let op de volgorde!).
- (6) c. De matrix A bepaalt als gebruikelijk een operator op $\mathbb{C}^2$. Toon aan dat deze operator zelfgeadjungeerd is ten opzichte van $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
- (8) d. Bepaal een basis voor $\mathbb{C}^2$ die orthogonaal is ten opzichte van zowel $\langle \cdot, \cdot \rangle$ als het gewone inwendig product van $\mathbb{C}^2$. Kun je de gevonden basis ook *orthonormaal* maken ten opzichte van beide inwendige producten?

2. Gegeven zijn twee unitaire ruimten V en W en een operator $T : V \rightarrow W$.

- (6) a. Bewijs: $\text{Im } T^* \subseteq (\text{Ker } T)^\perp$.
- (7) b. Bewijs: $\dim \text{Im } T^* \leq \dim \text{Im } T$. *Aanwijzing:* $V = \text{Ker } T \oplus (\text{Ker } T)^\perp$.
- (6) c. Bewijs: $\dim \text{Im } T^* = \dim \text{Im } T$.
- (5) d. Bewijs: $\text{Im } T^* = (\text{Ker } T)^\perp$.

- (22) 3. De volgende kwadratische vergelijking bepaalt een kwadriek in $\mathbb{R}^3$:

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 6x_1x_3 + 6x_2x_3 - 3x_3^2 - 2x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 7 = 0.$$

Bepaal van deze kwadriek het middelpunt, de asrichtingen en de aslengten. Met wat voor oppervlak hebben we te maken? NB Om wat rekenwerk te besparen: de eigenwaarden van de bijbehorende matrix zijn 2, 3 en -6 .

- (20) 4. Formuleer de Ongelijkheid van Bessel en bewijs deze met behulp van de Stelling van Pythagoras.

De waardering voor elke vraag staat in de kantlijn; het cijfer wordt berekend volgens de formule

$$\text{Cijfer} = \frac{\text{Totaal} + 10}{10}$$

en op de gebruikelijke wijze afgerond.

EINDE